CONTROLE DE ERROS EM PROCESSOS:
uma alternativa para o ensino de Teoria dos Limites para ciências de base Matemática

Américo Augusto Nogueira Vieira *

RESUMO

O presente artigo objetiva apresentar, sinteticamente, uma forma moderna e pragmática da Teoria dos Limites; focando-se no conceito de “limite finito de função a uma variável real quando x tende a um valor também finito”. O texto compreende quatro subseções: uma breve introdução, em seguida apresenta-se uma estratégia didático pedagógica para esta nova abordagem e, após, considerações de cunho epistemológico sobre o uso do controle de erros na ciência em geral. Ao final, conclui-se que a Teoria dos Limites inaugurou uma Matemática de cunho epistemológico que se imbrica em toda a prática científica como o modo de controlar erros em processos. A pesquisa que subsidiou o presente trabalho foi baseada em ampla bibliografia e foi desenvolvida durante os anos de 2000 e 2005 em curso de doutoramento na COPPE/UFRJ.

Palavras-chave: Educação. Matemática. Teoria dos Limites. Controle de Erros em Processos. Ensino de Ciências. Epistemologia.

* Pós-Doutor em Ciência da Informação (UFPB). Doutor em História das Ciências, das Técnicas e Epistemologia (COPPE/UFRJ). Mestre em Engenharia de Produção (COPPE/UFRJ). Mestre em Memória Social e Documento (UNIRIO). Professor de Direito na Universidade Federal do Paraná (UFPR, Brasil). Professor Visitante de Ciência da Informação na UFPB (2012-2014). Bacharel em Direito. Bacharel e Licenciado em Matemática. Atualmente é Bacharelando em Arquivologia (UEPB) e realiza Especialização em Gestão Pública Municipal pela UFPB. E-*mail*: americo_vieira@yahoo.com.br.

1 INTRODUÇÃO

O marco mais significativo da ciência moderna cuja viragem se deu na Revolução Científica dos Séculos XVI e XVII é o surgimento do Cálculo Diferencial e Integral. Sem este, a Física não teria tomado o impulso que tomou, e as múltiplas previsões obtidas a partir do surgimento da ciência moderna não teriam sido possíveis. Possivelmente, a luta entre “as ideologias portadoras da verdade” teria sido vencida pela religião e não pela ciência. A compreensão, a previsão, o aperfeiçoamento e a otimização da atividade técnica, que se apresentou como o acúmulo das experiências humanas, teria tido um outro impacto e não haveria modernamente a tecnociência controladora da atividade produtiva material. A rejeição da inovação técnica não é um caso isolado aqui e acolá[1]; há inúmeros casos, e se não é possível rejeitar modernamente a inovação é porque não se conseguiram mecanismos impedidores, mesmo quando esse impedimento visa, de fato, salvar a espécie humana de aniquilamento[2]. Com o objetivo de apresentar mais rapidamente, e muito eficientemente, a essência do Cálculo Diferencial e Integral, não nos deteremos ao escopo teórico (ou na forma) desenvolvido por seu criador, Isaac Newton[3]. Nossas considerações didáticas[4] serão sobre seu desenvolvimento posterior, ou melhor, sobre o elaborado refinamento de Weierstrass[5]. Antecipamos que, apesar de darmos tratamento formal à teoria que subsidia o Cálculo Diferencial e Integral como um todo, isto é, a Teoria dos Limites, esta é apresentada de uma forma totalmente nova e simples. Forma essa que permitirá o desvelamento do *ethos* do controle, e não de uma ciência apenas preditiva.

A pesquisa que subsidiou o presente trabalho foi baseada em ampla bibliografia (aposta nas referências) e foi desenvolvida durante o doutoramento do autor no Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia, mais conhecido como COPPE/UFRJ (Coordenação dos Programas de Pós-Graduação em Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro)[6] durante os anos de 2000 a 2005, e o presente artigo é uma adaptação recente, inédita e ampliada de um trecho de capítulo dessa tese de doutoramento[7].

2 UMA ABORDAGEM PRAGMÁTICA DA TEORIA DOS LIMITES VISANDO O DOMÍNIO DA SINTAXE

Em nossas argumentações estaremos entronizando as categorias de conhecimento típicas da semiótica

[1] Veremos adiante que o próprio Cálculo também sofreu rejeições em seu início.

[2] Como exemplo, a tecnologia nuclear visando artefatos para a guerra.

[3] Sabemos que Leibniz também recebe crédito pela criação/desenvolvimento do Cálculo, porém, o faz de outra forma.

[4] Entretanto, nas questões epistemológicas que serão abordadas, após a parte da estratégia didática sugerida, considerar-se-á todo o desenvolvimento do Cálculo desde sua criação/desenvolvimento por Newton e Leibniz.

[5] "Weierstrass não publicou suas idéias sobre a aritmetização da análise, mas elas foram difundidas por estudantes, como Ferdinand Lindemann e Eduard Heine, que assistiram a suas aulas." (BOYER, 1974, p. 410). "(...) as definições de limite de uma função encontradas em livros atuais são essencialmente as mesmas que Weierstrass e Heine introduziram há quase um século. As chamadas provas por épsilons e deltas são agora parte do instrumental comum dos matemáticos." (BOYER, 1974, p. 411).

[6] Site da instituição: <http://www.coppe.ufrj.br/>. Acesso em: 13 abr. 2014.

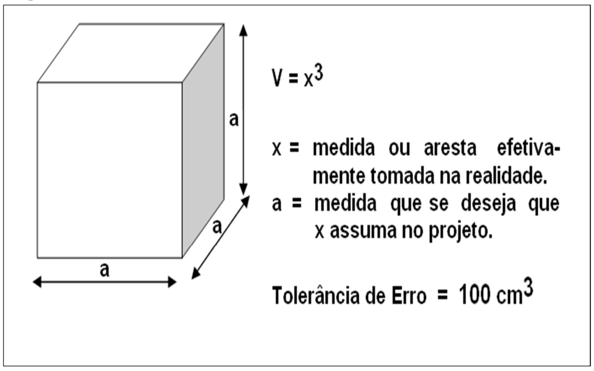
[7] Tese denominada "Prolegômenos a Uma Epistemologia do Controle: rumo à Engenharia do Conhecimento" no Programa Multidisciplinar de História das Ciências, das Técnicas e Epistemologia.

(sintaxe, semântica e pragmática). Neste sentido, o que aqui proporemos é partir de uma situação empírica (ainda que seja um experimento mental sobre uma situação de cunho prático), de forma sistemática, e avançar do experimento prático mental para o domínio da sintaxe da principal definição da Teoria dos Limites (o caso do limite uma função a uma variável real de resultado finito quando a variável "x" tende também a um valor finito). Para lograrmos êxito, então considerem o seguinte experimento a seguir.

EXPERIMENTO

"Quer-se construir um cubo (uma espécie de sabão para lavar roupas, em barra), a partir de uma dada argamassa moldável (matéria prima), com um volume ideal de 1000 cm^3. Devido à função que esta peça exercerá, o órgão de fiscalização (tipo o INPM – Instituto Nacional de Pesos e Medidas) permite uma tolerância de erro (que é sempre pré-estabelecida) neste volume de, no máximo, 100 cm^3. Esta empreitada deverá ficar a cargo da seção de Moldes e Formas, chefiada pelo engenheiro Newton. Este deverá, ao final, descrever o processo de desenvolvimento da forma (que poderá ter sua tolerância de erro, que é incialmente ε = 100 cm^3, modificada pelos órgãos de fiscalização e/ou normatização)."

Figura 1 - Situação Geral do Experimento



Fonte: Elaborado pelo autor (2005).

RELATÓRIO DO EXPERIMENTO

A partir do enunciado do experimento, desenvolvemos o seguinte:

$V_{máx}$ = 1100 cm^3 → $a_{máx}$ = 10,32 cm (arredondamento na 2ª casa decimal, a menor).

V_{ideal} = 1000 cm^3 → a_{ideal} = 10,00 cm (a partir de uma tolerância ε = 100 cm^3).

$V_{mín}$ = 900 cm^3 → $a_{mín}$ = 9,66 cm (arredondamento na 2ª casa decimal, a maior)

Tais arredondamentos levaram em conta os procedimentos de majoração e minoração fundando-se nos critérios de já ser o valor máximo ou de já ser o valor mínimo. A utilização de duas casas decimais deve-se, em geral, aos aparelhos de mensuração disponíveis e à natureza do material empregado para a confecção do molde. Relata-se, entretanto, que, devido a pouca qualificação dos operários empregados foi-se obrigado a modificar o acima estabelecido, respeitando, porém, as condições dadas. Face à confusão provocada pelo estabelecimento de três arestas internas para o molde (máx, mín, e ideal), procedeu-se da maneira a seguir:

$a_{máx}$ = 10,32 cm
δ_1 = 0,32 cm
a_{ideal} = 10,00 cm
δ_2 = 0,34 cm
$a_{mín}$ = 9,66 cm

Determinou-se aos operários que construíssem uma forma com aresta interna de 10,00 cm, sendo possível um erro a maior de 0,32 cm (exclusive) e a menor de 0,34 cm (exclusive). Ainda assim houve confusão. Tentou-se novo procedimento:

$a_{máx}$ = 10,32 cm
δ_1 = 0,32 cm
a_{ideal} = 10,00 cm $\qquad \delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\} = 0{,}32$ cm
δ_2 = 0,34 cm
$a_{mín}$ = 9,66 cm

Desta forma, unificando-se à menor a variação de erro permitido na aresta (de tal forma a concordar com os critérios pré-estabelecidos na ordem de serviço)[8], determinou-se que se construísse uma forma com aresta interna de 10,00 cm, sendo um erro possível a maior ou a menor de 0,32 cm (exclusive), o que veio a minimizar qualquer possibilidade de confusão na compreensão da ordem. Finalmente, cumpriu-se o solicitado. Os procedimentos anteriormente descritos permitem afirmar que os erros neste processo estão controlados para qualquer tolerância dada. Isto é, mesmo se houvesse a alteração de $\varepsilon = 100\ cm^3$ para $\varepsilon = 200\ cm^3$, ou para $\varepsilon = 50\ cm^3$, (ou qualquer outro valor positivo, dado que erros no mundo concreto são sempre positivos) bastaria recalcular o "δ" a partir dos novos valores de "ε" e, então, fornecer o novo valor de "δ" (erro admissível na variável formadora) para os operários.

Matematicamente, pode-se escrever acerca do relatório do experimento:

$$\lim_{x \to 10} x^3 = 1000 \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0 \text{ tq } 0 < |x-10| < \delta \rightarrow |x^3 - 1000| < \varepsilon$$

Fim do Relatório

[8] Se unificássemos pelo maior valor de δ (δ_2), então violaríamos o valor máximo para "a" (passaríamos de 10,32).

Este exemplo-experimento permite que seja introduzida, nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral, a Teoria dos Limites, com o seu verdadeiro enfoque de Limite como "Controle de Erros em Processos", tendo então a definição formal de "Limite Finito Quando x Tende a Um Valor Finito" (um dos casos de controle do erro) a forma geral de[9]:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \text{ tq } 0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

Se fizermos uma analogia de nosso experimento/exemplo com a Teoria das Ideias de Platão, então quando desejarmos construir no mundo sensível (real para nós e da cópia para Platão) um certo objeto (que através de uma linguagem idealizada, denomina-se este objeto de, por exemplo, cubo) estaremos no "papel de Demiurgos" (o deus artífice). Isto é, estaremos carimbando uma forma/termo, idealizada, no *chaos* e gerando um objeto, no caso um cubo, no mundo sensível; um cubo borrado, um cubo não cubo, uma cópia do cubo. O ponto crucial é que não sabemos ao certo se, de fato, nos elevamos ao mundo das essências e assim conseguimos a melhor forma possível no real, ou seja, a cópia (no sentido utilizado por Platão); ou se estamos a fazer a cópia da cópia, ou melhor, se estamos a construir simulacros[10]. Ainda que admitamos a *priori* nosso erro, ao empreender a cópia, tal como o novo discurso matemático também o faz: se "x" tende a "a", então: "x" é próximo de "a", porém, diferente de "a"; o novo discurso não mais afirma **o que é**, apenas diz **o que tende a ser**.

Na Geometria Euclideana, o lado é de 10 cm, enquanto, no Cálculo, o lado **tende a** 10 cm. O primeiro é um discurso do tipo ontológico: as afirmações são sobre o que "é", sobre o ser. O segundo é um discurso do tipo epistemológico: isto é, visa o que se "depreende do ser" e "o que é possível dizer dele", com o instrumental lingüístico disponível (é que ele, o "objeto": "tende a ser", "tende a ter"). A certeza **do que é** neste discurso se esvai, mas mantém-se, a partir de um ***controle***

[9] Utilizam-se alguns termos funtados (relativos a funtores) por módulo devido à incerteza da natureza do erro, se a maior ou a menor.

[10] Recomenda-se a leitura de *Paidéia* de Werner Jaeger (1989, p. 601-623) para quem não conhece a Teoria das Ideias de Platão. Caso se queira antes ter uma leitura de caráter ainda bem mais introdutório, então há vários outros autores e modernamente até sítios de internet que fazem menção a Teoria das Ideias de forma bastante razoável (vide, por exemplo: <http://lrsr1.blogspot.com.br/2011/04/platao-teoria-das-formas-ou-ideias-e-o.html>, ou <http://www.monergismo.com/textos/filosofia/teoria-formas-platao_nash.pdf>, ou <http://www.puc-rio.br/pibic/relatorio_resumo2009/relatorio/ctch/fil/carlos_edu.pdf>. Todos acessados em 14 abr. 2014. Alguns bastante populares e rapidamente compreensíveis, ainda que a maioria sem grandes credenciais no *metier* científico, mas razoavelmente hábeis e úteis, sobretudo para estudantes sem grande prática de extensas leituras).

de erros, uma coesão e objetividade do discurso.

Ao realizarmos a construção/ carimbada de nosso cubo, esta é realizada através de um molde (outra construção que conterá erro, por estar no mundo das cópias). Devemos perceber que nossa tarefa mental será controlar o erro no produto final, através da dissecação e controle das variáveis formadoras primitivas; devemos engendrar um processo de fabricação controlável (procedimento controlável). No exemplo/experimento em tela, existe o controle (existe o limite), se e somente se, estiver ocorrendo que **para toda** tolerância de erro pré-estipulada (positiva, pois no mundo sensível só existe o positivo), pudermos exibir uma tolerância de erro na variável formadora, tal que: **se** toda vez que criarmos esta variável formadora no mundo real (x), sua diferença com o ideal (10), seja menor que sua tolerância de erro e, **então,** isto acarrete que o produto final real "x^3" esteja dentro das especificações desejadas, isto é, que sua diferença com o ideal (1000 cm^3), seja menor do que a tolerância de erro pré-estipulada.

Finalmente, na apresentação do conceito de limite finito de função quando "x" tende também a um valor finito, não nos utilizamos do usual gráfico cartesiano para justamente enfatizar aqui o aspecto mais pragmático do uso da Teoria dos Limites. Apesar do desenho do cubo ter estado presente, ao evitarmos o desenho do gráfico cartesiano (que poderá também ser incluído complementarmente e após esse tipo de abordagem), procuramos dar ênfase a questão do controle de erros sem nos limitarmos a uma visão euclideana típica que se encerraria em três dimensões. Com isso visamos poder mais facilmente retomar as mesmas considerações acerca de "controle de erros" em Limites de Funções a Várias Variáveis Reais (geralmente no Curso de Cálculo II)[11], olhando para a "n" (geralmente com n>3) variáveis formadoras do custo de uma camisa (ou outra peça de roupa, por ser exemplo fácil). Operar com "n" variáveis é bem mais fácil sob uma "visão econômica" do que sob uma "visão geométrica", por esse motivo (entre outros) inserem-se estes pequenos cuidados de não vício

[11] O que é usual quando o curso de Cálculo I possui seis ou mais créditos.

procedimental na apresentação do Cálculo I.

3 A IDEIA DE CONTROLE COMO "*ETHOS*" DA PRÁTICA CIENTÍFICA

O homem, desde os tempos mais remotos, sempre quis controlar o seu destino. O termo "previsão" ou "previsão científica", muito utilizado em ciência, é apenas a condição *sine qua non* para haver a atividade de controle. Nos primeiros tempos não havia um conhecimento sistematizado, tal como já encontramos nas primeiras civilizações, muito menos havia a ciência da forma que praticamos. O que havia era a magia. Seria a magia também uma forma de controle? Para Colin Ronan (1987, p. 12, negrito nosso):

> É impossível examinar a história ou a teoria da ciência sem se defrontar com a magia. Esta era um complexo amálgama de espiritismo e arcano. Para quem não tenda a imaginar a ciência moderna meramente como uma taumaturgia, a própria menção da magia neste contexto pode parecer estranha ou até inaceitável. Contudo, aquilo que aparentemente constitui abordagens totalmente disparatadas da natureza contém, na verdade, muitos fatores comuns. A magia foi um modo legítimo de expressar uma síntese do mundo natural e do seu relacionamento com o homem. Quando, numa sociedade primitiva, o mago, impostor ou curandeiro se propõe provocar chuva por meios artificiais, ele expressa sua compreensão de uma ligação entre a chuva e o crescimento das plantações, entre um e outro aspecto da natureza e sua estimativa de que a sobrevivência do homem depende do comportamento do mundo natural. Ele sente que há alguma conexão entre o homem e o mundo que o cerca, algum entendimento primitivo de que, conhecido o procedimento correto, o homem pode **controlar** as forças da natureza e colocá-las a seu serviço.

Claramente Ronan também vislumbra a idéia de controle. Tal controle de seu *habitat*, através da criação de sobrenaturezas[12], foi de tal forma trivializado e banalizado, que chamamos de "busca da natureza", ir a um lindo campo com cavalos e olhar para coqueirinhos plantados simetricamente, pescar num pegue-pague e retornar para casa numa estrada segura. Termos como "desenvolvimento sustentável", "impacto ambiental" e outros fazem parte de nossas técnicas de intervenção e controle sobre a natureza. É claro que aquilo que não domamos na natureza, furacões, tempestades etc., estão sob observação, com vistas à obtenção do maior número de informações possíveis. Assim também

[12] O termo "sobrenatureza" é tomado aqui no mesmo sentido que José Ortega Y Gasset o toma em sua *Meditação da Técnica*.

ocorre nos casos da Teoria dos Limites, onde não há limite, isto é, controle (Limite no Infinito que dá Infinito, Limite no Finito que dá Infinito e nos casos em que os Limites Laterais são distintos ou não existem). Ao exercer o controle sobre seus pensamentos e suas representações e, posteriormente e gradativamente, exercer controle sobre seu *habitat*, o Homem passa a constituir normas de convivência, para que seja possível controlar os interesses individuais, em prol dos interesses do grupo. Lembramos que controlar e dominar não são sinônimos; a idéia de controle pode admitir a presença de erros, neste caso estes é que são controlados. As modernas normas de convivência são controles que a sociedade exerce sobre seus partícipes. Algumas normas são consideradas tão importantes que a sociedade resolve delegar o controle exercido por estas as pessoas a um ente chamado Estado. Tais normas são presididas por uma Constituição. Um dos pontos mais relevantes no Direito Constitucional é o controle da constitucionalidade. Na economia, como já mencionamos anteriormente, quer-se o controle do processo produtivo e da distribuição, para poder haver o contínuo ajustamento às demandas e flutuações do mercado.

A Lógica Crisp[13], de forma direta, controla a compatibilidade entre seus enunciados. E, em nosso formato século XXI (tal como é visto em VIEIRA, 2004), controla as operações logicamente válidas, as OLVs[14], verificando se estas efetivamente se encaixam na categoria, uma forma indireta de controle sobre os enunciados. Isto é, um enunciado é verdadeiro se é compatível com a principiologia adotada, com os axiomas adotados e com os resultados anteriores já demonstrados. Nesse sentido, a demonstração lógica visa tão somente a verificar se o controle pode, ou não pode, ser exercido sobre o enunciado em demonstração.

Este controle sobre os enunciados, onde ainda permanece o caráter ontológico, era bem aceito pela religião Cristã. Vejamos o que nos aponta o Bispo

[13] Termo que os praticantes da Lógica e Matemática Fuzzy passaram a designar os praticantes da Lógica e Matemática usuais (notando que há muitas outras lógicas e matemáticas, tipo a família das lógicas paraconsistentes, entre outras).

[14] Diz-se que uma operação é uma OLV (Operação Logicamente Válida) se nunca transforma um enunciado verdadeiro em um enunciado falso; podendo transformar um enunciado verdadeiro em outro verdadeiro, um falso em outro falso, ou até mesmo um enunciado falso em um enunciado verdadeiro (VIEIRA, 2004, p. 36-40).

Berkeley[15] em *O analista* quando ataca sistematicamente a nova matemática de Newton e Leibniz (Berkeley, 2010, §2, p. 637-638, grifo nosso)[16]:

> Trata-se de uma antiga observação que **a geometria é uma excelente lógica**. E é preciso reconhecer que, quando as definições são claras, quando os postulados não podem ser recusados nem os axiomas, negados, quando, após contemplar e comparar distintamente as figuras, as propriedades delas são derivadas por meio de uma cadeia contínua e bem conectada de consequências, sem jamais perder de vista os objetos e sempre mantendo a atenção fixada sobre eles, adquire-se com isso um hábito de raciocínio minucioso, exato e metódico, hábito esse que fortalece e ilumina a mente e torna-se de uso geral na investigação da verdade ao ser transferido para outros assuntos. Mas, por ora, valeria a pena considerar até que ponto nossos geômetras analíticos se afastam disso.

Nesse sentido, Berkeley percebe que há algo muito estranho nesta nova matemática (o Cálculo Diferencial e Integral ou Cálculo Infinitesimal). O que ora expomos aqui com um razoável grau de simplicidade não é corrente na literatura atual e muito menos o era nos séculos XVI e XVII. Vejamos mais um trecho de Berkeley (2010, §18, p. 647, negrito nosso):

> Agora, farei observações somente acerca do método de eliminar tais quantidades, o que se realiza sem a menor cerimônia. Assim como no caso das fluxões, o ponto de maior importância e preparatório a todo o restante era encontrar a fluxão do produto de duas quantidades indeterminadas, no *calculus differentialis* (método que se supõe ter sido apropriado do primeiro com algumas pequenas alterações), o ponto principal é obter a diferença daquele produto. A regra agora empregada é obtida com a rejeição do produto ou retângulo da diferença. E, em geral, supõe-se que nenhuma quantidade é maior ou menor com a adição ou a subtração de seu infinitesimal e que, consequentemente, **nenhum erro pode surgir dessa rejeição de infinitesimais**.

Note-se que, naquele contexto, seja por Newton e Leibniz não terem percebido a assunção *a priori* do erro nesta nova matemática, ou ainda que o tenham percebido não o quiseram ressaltar com temor de inserir o erro (análogo do pecado) na prática científica, onde a perfeição do círculo até bem

[15] O texto original de George Berkeley ficou pronto em 1734. Uma tradução confiável do mesmo encontra-se em: <http://www.scielo.br/pdf/ss/v8n4/07.pdf> (último acesso em: 14 abr. 2014).

[16] Antes do surgimento de Boole e Frege, a melhor fonte para o estudo da Lógica Crisp na forma que modernamente a entendemos era o texto *Os Elementos* de Euclides, que já continha as principais ideias e mecanismos do Método Hipotético-Dedutivo. É nesse sentido que Berkeley tece elogios à Geometria (idem para a admiração de Espinosa, Descartes e muitos outros à Geometria). Os trechos sobre Berkeley não se encontravam originalmente na tese de doutoramento que deu base ao presente artigo.

pouco reinava (antes de Kepler), Berkeley não deixou passar despercebido a inserção sutil do erro (o que ressaltamos no trecho anteriormente negritado). E ainda (BERKELEY, 2010, §19, p. 647-648, negrito nosso):

> No entanto, parece que, sejam quais forem os erros admitidos nas premissas, erros proporcionais aparecerão na conclusão, sejam eles finitos ou infinitesimais, e que ἀκρίβεια da geometria exigirá que nada seja negligenciado ou rejeitado. Em resposta a isso, direis talvez que as conclusões são rigorosamente verdadeiras e que, portanto, também devem assim ser os princípios e métodos dos quais são derivados. Mas essa maneira invertida de demonstrar vossos princípios a partir de vossas conclusões tanto vos é peculiar, cavalheiros, quanto é contrária às regras da lógica. A verdade da conclusão não provará a verdade nem da forma nem da matéria de um silogismo, na medida em que a ilação poderia estar errada ou as premissas serem falsas e, apesar de tudo, a conclusão ser verdadeira, embora não em virtude de tal ilação ou de tais premissas. Digo que em qualquer outra ciência os homens provam suas conclusões por meio de seus princípios, e não os princípios por meio das conclusões. Mas, se na vossa ciência permitis essa maneira antinatural de proceder, a consequência **será que devereis adotar a indução e dizer adeus à demonstração**. **Se aceitardes isso, vossa autoridade para guiar-nos em questões que envolvem a razão e a ciência não perdurará por muito mais tempo**.

Um leitor desavisado poderia ter se surpreendido quando imediatamente após nosso experimento-exemplo trouxemos também a lume a Teoria das Ideias de Platão. Notem que fazer ciência para Berkeley é operar no “mundo das ideias”, onde há unicidade e perfeição na concepção dos objetos e fenômenos. Por outro lado, no “mundo da cópia” ou no “mundo dos simulacros”, as observações sobre estes mundos são permeadas pelo **caráter indutivo** (as ciências empíricas se utilizam fartamente do método indutivo)[17], e é isso que Berkeley percebe (ou pelo menos intui) que está sendo inserido sub-repticiamente nesta nova matemática. A nova matemática não mede o que está no “mundo das ideias” como, por exemplo, um cubo idealizado cujo lado **é** de 10 cm; o que ela mede é a cópia ou o simulacro, que apenas **tende a ser** de 10 cm. No que denominamos “mundo sensível”, ou “mundo concreto”, ou “mundo real”, e que aqui analogizamos com o “mundo da cópia” ou “mundo do simulacro” (da Teoria das Ideias de Platão), as mensurações realizadas **sempre estarão sujeitas a erros** e, como

[17] Vide Karl Popper em *A lógica da pesquisa científica*.

cientistas, devemos prever[18] e, se possível, **controlar os erros**. Esta dicotomia entre uma lógica ontológica (Lógica Crisp, obtidas suas características gerais por Berkeley nos Elementos de Euclides - Geometria) e a nova matemática epistemológica (Cálculo Infinitesimal) ainda permeia nossa prática científica (ainda que tentativas para novas lógicas estejam sendo realizadas)[19]. Berkeley percebeu claramente que a ciência, tal como ele a entendia, não perduraria por muito tempo; e ele tinha razão, dado que o que se inaugurava com esta nova matemática, o Cálculo, era o que denominamos de ciência moderna.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conclui-se que "haver limite" (como usualmente verbaliza-se em aulas de Cálculo Diferencial e Integral) é "haver controle de erros em processos"[20]. Também inescapável é a "conclusão corolário" acerca das Integrais, tal como nos defrontamos ao apresentarmos a "Soma de Riemann": é um **mecanismo de controle de erro no processo de cálculo de áreas** (o que é natural, pois tanto a derivada como a integral são casos de limites). Assim, quando apresentamos a Teoria dos Limites para estudantes de graduação, sejam estes estudantes do Bacharelado (ou Licenciatura) de Matemática ou alunos de engenharias, Economia ou outros cursos de base Matemática, devemos ter em mente que: (1) se for área de conhecimento diferente do Bacharelado ou Licenciatura em Matemática, então uma abordagem que dê sentido pragmático ao domínio do conceito de Limite como "controle de erros em processos" será muito mais estimulante, para quem irá praticar ciência empírica, do que qualquer outra estratégia de ensino puramente sintática e/ou semântica; (2) por outro lado, mesmo para alunos de cursos de Matemática, estes possuirão, quando se tornarem docentes, mais turmas de Cálculo em outros cursos do que no próprio curso de Matemática. Dessa forma, ao nosso entendimento, mesmo se houver compreensão de que para o aluno de Matemática outra

[18] Condição *sine qua non* para um próximo passo.
[19] Pessoalmente não vemos problema nesta dicotomia, dado que o Princípio da Identidade seja voltado, tanto no caso do termo como no caso do enunciado, somente para o aspecto sintático. Porém, nosso entendimento também não inibe (ou é contrário) ao surgimento e uso na prática científica de lógicas como a Fuzzy e as paraconsistentes.
[20] Quando não há o limite, então não há o controle do erro no processo (podendo ainda assim haver alguma informação se o descontrole vai para o lado positivo ou para o negativo – mais ou menos infinito - etc.).

abordagem é mais interessante, então entendemos que essa outra abordagem poderá ser apresentada em um curso de Análise Matemática, entronizando-se, no Cálculo, uma abordagem mais pragmática; essa que aqui apresentamos ou outra que vise dar sentido a manipulação de épsilons e deltas e releve/ressalte a questão do controle de erros na prática científica. Entendemos que um perfeito domínio conceitual de limites favoreça também o aprendizado de derivadas (principalmente da parte relativa à Regra Geral de Derivação), das integrais (inclusive de seus teoremas), de uma melhor compreensão do Cálculo a Funções de Várias Variáveis, do Cálculo Numérico (onde a questão do controle de erros em processos computacionais é apresentada, em geral, logo no início da disciplina) e de várias aplicações do Cálculo as ciências empíricas tipo Economia e engenharias.

Pode-se dizer, *grosso modo*, que o Cálculo e seus desdobramentos[21] são a principal base linguística representacional da ciência moderna. Esta Matemática epistemológica é direcionada a *controlar os erros em processos* acerca dos objetos e dos fenômenos em ciência. Isto é, os mecanismos construídos com esta matemática estão a controlar (ou a tentar controlar) as diversas variáveis envolvidas nos diversos fenômenos ou objetos tratados pela ciência. Ou ainda, nas ciências, seja pela Lógica (controle de compatibilidade de enunciados), seja pelo Cálculo (controle de erros em processos), a ideia de controle (e não somente de previsão) é essencial para a maioria das ciências, sendo que, para as engenharias um de seus pressupostos é a existência e/ou possibilidade de construção de **sistemas de controle**.

No controle de enunciados pela Lógica Crisp (que é largamente utilizada na Matemática tradicional) ainda permanece o caráter ontológico (dado que os enunciados ficam fixados em verdadeiro ou em falso)[22], já as mensurações aferidas pelo Cálculo já possuem um caráter epistemológico (apenas tendem a ser). Sabemos que tais considerações de cunho epistemológico não são tão correntes em institutos de Matemática. Entretanto, a Lógica Fuzzy

[21] Juntamente com a Lógica Moderna (que aqui denominamos de Lógica Crisp).

[22] Um enunciado **é** verdadeiro (ou um enunciado **é** falso), portanto, de caráter ontológico (se epistemológico, então, apenas **tenderia a ser**).

(que, ao nosso entendimento, faz com que os valores dos enunciados já não sejam exatos ou fixos) e suas aplicações são uma realidade em várias áreas do conhecimento e, nesse sentido, o presente artigo, além de criar novas possibilidades de ensino-aprendizagem em Matemática, incita os amantes da Matemática a içar velas e deixar os novos ventos do conhecimento possibilitarem a visada de um novo mundo.

ABSTRACT

*This article intends to present, synthetically, a modern and pragmatic presentation of the Theory of Limits; focusing on the concept of "finite limit of a real variable function when **x** also tend to a finite value". The text includes four subsections: after a brief introduction, present a didactic-pedagogical strategy to this new approach. Then, some epistemological considerations on the use of error control in general science are discussed. Finally, it comes to the conclusion that the Theory of Limits inaugurated a Mathematics of epistemological nature which is enmeshed across all the scientific practice as the way of controlling errors in processes. The research that supported the present work was based on extensive bibliography and was developed during the years 2000 and 2005 in the doctoral program at COPPE/UFRJ.*

Keywords: *Education. Mathematics. Theory of Limits. Error Control Processes. Teaching of Science. Epistemology.*

REFERÊNCIAS

ARRUDA, A. I. N. A. **Vasiliev e a Lógica Paraconsistente**. 1. ed. Campinas: UNICAMP, 1990.

AYRES JR., F. **Álgebra Moderna**. Rio de Janeiro: McGraw-Hill do Brasil, 1974.

BACHELARD, G. **A Nova Ciência**. 1. ed. São Paulo: Abril Cultural, 1973.

_______. **Epistemologia**. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1977.

BARBOSA, J. E. F. **Lógica a Tipos Finitos e Transfinitos**. 1. ed. Rio de Janeiro: IME, 1968.

BARTLE, R. G. **Elementos de Análise Real**. Rio de Janeiro: Campus, 1983.

BARTHOLO, R. S. **Os Labirintos do Silêncio: cosmovisão e tecnologia na modernidade**. 1. ed. São Paulo: Editora Marco Zero/ COPPE/UFRJ, 1986.

_______. A Dor de Fausto. Rio de Janeiro: Editora Revan, 1992.

BASTOS, C. R. **Curso de Direito Constitucional**. 19. ed. São Paulo: Saraiva, 1993.

BERKELEY, G. O analista: ou um discurso dirigido a um matemático infiel. **Scientiæzudia**, São Paulo, v.8, n.4, p.633-76, 2010. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/ss/v8n4/07.pdf>. Acesso em: 14 abr. 2014.

BERTALANFFY, L. V. **Teoria Geral dos Sistemas**. 2. ed. Petrópolis: Vozes, 1975.

BOOLE, G. **Studies in Logic and probability**. Londres: Ed. R. Rhees, 1952.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRAMELD, T. **O Poder da Educação**. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1977.

CÂMARA JUNIOR, J. M. **Dicionário de Filologia e Gramática**: referente à língua portuguesa. Rio de Janeiro: J. Ozon, 1974.

CARNAP, R. **Empirismo, semântica e Ontologia**. 1. ed. São Paulo: Abril Cultural, 1975.

_______. **Significado e Sinonímia nas Linguagens Naturais**. 1. ed. São Paulo: Abril Cultural, 1975.

_______. **Pseudosproblemas na Filosofia**. 1. ed. São Paulo: Abril Cultural, 1975.

_______. **Testabilidade e Significado**. 1. ed. São Paulo: Abril Cultural, 1975.

_______. **O Caráter Metodológico dos Conceitos Teóricos**. 1. ed. São Paulo: Abril Cultural, 1975.

CASSIRER, E. **Ensaio Sobre o Homem**: introdução a uma filosofia da cultura humana. São Paulo: Martins Fontes, 1994.

CASTRUCCI, B. **Introdução à Lógica Matemática**. São Paulo: Nobel, 1979.

_______. **Elementos de Teoria dos Conjuntos**. São Paulo: Nobel, 1983.

CERQUEIRA, L. A.; OLIVA, A. **Introdução à Lógica**. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1979.

CHERRY, C. **A Comunicação Humana**: uma recapitulação, uma vista de conjunto e uma crítica. São Paulo: Cultrix, EDUSP, 1974.

CHURCH, A. **Introduction to Mathematical Logic**. [S.l.]: Princeton University Pres, 1956.

CHURCHMAN, C. W. **Introdução à Teoria dos Sistemas**. 2. ed. Petrópolis: Vozes, 1972.

COPI, I. M. **Introdução à Lógica**. São Paulo: Mestre Jou, 1978.

COSTA, N. C. A. **Ensaio Sobre os Fundamentos da Lógica**. 1. ed. São Paulo: HUCITEC, 1994.

COSTA LIMA, L. Pressupostos do Pensamento Estruturalista. In: ESTRUTURALISMO e Teoria da Linguagem. 1. ed. Petrópolis: Vozes, 1971.

DAGHLIAN, J.. **Lógica e Álgebra de Boole**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 1995.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. **A Experiência Matemática**. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1989.

DESCARTES, R. **Discurso do Método**. São Paulo: Abril Cultural, 1983.

_______. **Meditações**. São Paulo: Abril Cultural, 1983.

DEWEY, J. **Lógica**: A Teoria da Investigação. São Paulo: Abril Cultural, 1974.

DIAS DE DEUS, J. **A Crítica da Ciência**. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1974.

DIEUDONNÉ, J. **A Formação da Matemática Contemporânea**. 1. ed.. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1990.

DIJKSTERHUIS, E. J. **Critical poblems in the history of science**. [S.l.]: Univ. of Wisconsin Press, 1969.

DIJKSTERHUIS, E. J.; FORBES, R. J. **História da Ciência e da Técnica:** da antigüidade ao século dezessete. Lisboa: Ulisseia, 1963.

_______. **História da Ciência e da Técnica**: séculos dezoito e dezenove. Lisboa: Ulisseia, 1963.

D'OTTAVIANO, I. M. L. A Lógica Clássica e as Lógicas Não-Clássicas. In: ÉVORA, F. R. R. **Século XIX**: o nascimento da ciência contemporânea. Campinas: UNICAMP, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, 1992.

DURAND, D. **Sistémica**. 5. ed. Lisboa: Dinalivro, 1992.

DURANT, W. **A História da Filosofia**. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora Record, 1991.

ECO, U. **Tratado Geral de Semiótica**. São Paulo: Editora Perspectiva, 1976.

EUCLID. **The Thirteen. Books of Euclid's Elements**. Chicago: University of Chicago Press, 1952.

FEYERABEND, P. K. **Diálogo Sobre o Método**. Lisboa: Editorial Presença, 1991.

FREGE, J. G. **Lógica e Filosofia da Linguagem**. São Paulo: Cultrix/EDUSP, 1978.

_______. **Os Fundamentos da Aritmética**. São Paulo: Abril Cultural, 1983.

_______. **Sobre a Justificação Científica de Uma Conceitografia**. São Paulo: Abril Cultural, 1983.

GOMES, A. M. **Introdução à Álgebra Moderna**. Rio de Janeiro: Faculdade Nacional de Filosofia, 1960.

GOMIDE, F. M. **Filosofia do conhecimento científico**: hipóteses e aprioris. Curitiba: Editora Albert Einstein, [19??].

GRANGER, G. G. **Lógica e Filosofia das Ciência**s. São Paulo: Edições Melhoramentos 1955.

GRAU, K. J. **Lógica**. Rio de Janeiro: Athena Editora, 1935.

HAACK, S. **Filosofia das Lógicas**. São Paulo: Ed. UNESP, 2002.

HAVELOCK, E. A. **The Literate Revolution in Greece and its Cultural Consequences**, Princeton, 1982.

_______. **A Revolução da Escrita na Grécia e Suas Conseqüências**

Culturais. 1. ed.. São Paulo: Editora da Universidade Estadual Paulista, Rio de Janeiro: Ed. Paz e Terra, 1996.

_______. **A Musa Aprende a Escrever**. 1. ed. Lisboa: Ed. Gradiva, 1996.

_______. **Prefácio a Platão**. 1. ed. Campinas: Papirus Editora, 1996.

HEINEMANN, F. **A Filosofia do Século XX**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1983.

HUSSERL, E. **Investigaciones Logicas**. 2. ed. Madrid: Revista de Occidente, 1967.

JAEGER, W. W. **Paidéia**. 2. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1989.

JAMES, W. **Pragmatismo**. 1. ed. São Paulo: Abril Cultural, 1974.

_______. **O Significado da Verdade**. 1. ed. São Paulo: Abril Cultural, 1974.

KANT, I. **Lógica**. Rio de Janeiro: Ed. Tempo Brasileiro, 1992.

KEYNES, J. M. **A Treatise on Probability**. London: Cambridge University Press,1992.

KNEALE, W.; KNEALE, M. **O Desenvolvimento da Lógica**. Lisboa: Ed. Fundação Calouste Gulbenkian, 1991.

KOPNIN, P. V. **A Dialética como Lógica e Teoria do Conhecimento**. Rio de Janeiro: Ed. Civilização Brasileira, 1978.

KUSCH, M. **Linguagem como cálculo versus linguagem como meio universal**: um estudo sobre Husserl, Heidegger e Gadamer. São Leopoldo: Ed. Unisinos, 2001.

LAKATOS, I. **A Lógica do Descobrimento Matemático**. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1978.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. São Paulo:Harper Row do Brasil, 1982.

LIPSCHUTZ, S. **Teoria dos Conjuntos**. São Paulo: McGraw-Hill, 1972.

LOCKE, J. **Ensaio Acerca do Entendimento Humano**. São Paulo: Ed. Abril, 1973.

LOPES, E. **Fundamentos da Linguística Contemporânea**. 14. ed. São Paulo: Cultrix, 1995.

MASON, S. F. **História da Ciência**. Porto Alegre: Editora Globo, 1962.

MARTINS, R. C. Sobre a Natureza da Engenharia de Produção e o Diálogo Interdisciplinar. In: ENCONTRO NACIONAL DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, 12. 1992, São Paulo. **Anais...** São Paulo, 1992.

MUNEM, M. A.; FOULIS, D. J. **Cálculo**. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1983.

ORTEGA Y GASSET, J. **Meditação da Técnica**. Rio de Janeiro: Livro Ibero Americano Ltda., 1963.

_______. **Em Torno a Galileu**. Petrópolis: Vozes, 1989.

PEIRCE, C. S. **Escritos Coligidos**. São Paulo: Ed. Abril, 1972.

PETROZZO, D. P.; STEPPER, J. C. **Reengenharia na Prática: como implementa um programa efetivo de reengenharia e como evitar erros no**

processo. São Paulo: Makron Books, 1996.

PIAGET, J. **A Epistemologia Genética**. 2. ed. São Paulo: Ed. Abril Cultural, 1978.

POPPER, K. R. **A Lógica da Pesquisa Científica**. São Paulo: Ed. Cultrix, 1993.

_______. **Conjecturas e Refutações**. Brasília: Ed. Universidade de Brasília, 1972.

PUTNAM, H. **Lógica-Combinatória**. Lisboa: Calouste Gulbenkian, 1988.

QUINE, W. V. O. **Filosofia da Lógica**. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1972.

_______. **O Sentido da Nova Lógica**. Curitiba: Ed. UFPR, 1996.

QUINET, J. **Matemática Superior**, Porto Alegre, Ed. Globo, 1968.

RELATÓRIO da Segunda Conferência Interamericana sobre Educação Matemática. Educação Matemática nas Américas. São Paulo, Companhia Editora Nacional, 1969.

RIGHETTO, A.; FERRAUDO, A. S. **Cálculo Diferencial e Integral**. São Paulo: IBEC, 1982.

RONAN, C. A. **Das origens à Grécia**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1987.

_______. **Oriente, Roma e Idade Média**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1987.

ROSA, L. P. **Tecnociências e Humanidades**: novos paradigmas, velhas questões. São Paulo: Paz e Terra, 2005.

RUSSEL, B. **História da Filosofia Ocidental**. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1957.

_______. **O Conhecimento Humano: sua finalidade e limites**. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1958.

_______. **A Perspectiva Científica**. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1962.

SANTOS, J. T. **Antes de Sócrates**. 1. ed. Lisboa: Gradiva Publicações,1985.

SPIVAK, M. **Cálculo Infinitesimal**. Barcelona: Editorial Reverté,1972.

TARSKI, A. **Logic, semantics, metamathematics**. Oxford: Clarendon, 1956.

TOLMASQUIM, A. T. Conhecimento e Poder: A expressão Mítica da Ciência. In: SEMINÁRIO NACIONAL SOBRE HISTÓRIA DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA,1., 1986, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro: CNPq/ PADCT, 1986.

VASCONCELLOS, M. J. E. **Pensamento Sistêmico**: o novo paradigma da ciência. Campinas: Papirus, 2002.

VIDAL DE CARVALHO, L. A. **Datamining**: a mineração de dados no marketing, medicina, economia, engenharia e administração. 1. ed. São Paulo: Érica, 2001.

VIEIRA, A. A. N. **Prolegômenos a Uma Epistemologia do Controle**: rumo à Engenharia do Conhecimento. 2005. 339 f. Tese (Doutorado em História das Ciências, das Técnicas e Epistemologia) - COPPE / UFRJ, Rio de Janeiro, 2005.

_______. **Considerações Epistemológicas Sobre a Construção de Discursos**. 1998. 163 f. Dissertação (Mestrado em Memória Social e Documento) - UNIRIO, Rio de Janeiro, 1998.

_______. **Lógica**: método semiótico-estruturado. 1. ed. Rio de Janeiro: Sarau Cultural, 2004.

VLASTOS, G. **O Universo de Platão**. Brasília: Ed. UNB, 1987.

WHITEHEAD, A. N.; RUSSEL, B. **Principia Mathematica**. Cambridge: Cambridge University Press, 1973.

WITTGENSTEIN, L. **Tratado Lógico-Filosófico**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1987.

_______. **Investigações Filosóficas**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1987.