

ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE O MÉTODO DE HILLERBORG E A TEORIA DAS CHARNEIRAS PLÁSTICAS NA RESOLUÇÃO DE PLACAS ELÁSTICAS RETÂNGULARES

COMPARATIVE ANALYSIS BETWEEN THE HILLERBORG METHOD AND THE THEORY OF PLASTIC HINGES IN THE RESOLUTION OF RECTANGULAR ELASTIC PLATES

Maria Ângela Pereira Xavier¹

Wesley Imperiano de Melo²

RESUMO

Apresenta-se neste artigo uma comparação entre o Método de Hillerborg e a Teoria das Charneiras Plásticas, tomando-se por base Lajes Elásticas Retangulares. A aplicação de Hillerborg, ao dimensionamento de lajes, consiste em obter uma distribuição de momentos que satisfaçam as condições de contorno e equilíbrio com o carregamento aplicado. Uma distribuição satisfatória seria aquela em que os momentos torçores fossem nulos. Este método foi denominado por Hillerborg de Método Simplificados das Faixas. Dessa maneira, o cálculo total dos momentos em uma placa foi convertido em obtenção de momentos em diversos “Vigas-Faixas”, onde todos os métodos de cálculo de momentos em vigas podem ser usados. Na aplicação da Teoria das Charneiras Plásticas, utilizam-se para efeito de pré-dimensionamento, tabelas baseadas em CZERNY, dos valores dos momentos elásticos em lajes com cargas uniformes. Considerando-se para o método das faixas a configuração de ruína das lajes para a repartição de cargas equivalentes, obtêm-se idênticos resultados entre os dois métodos.

PALAVRAS-CHAVE: Método de Hillerborg. Charneiras Plásticas. Placas Retangulares.

ABSTRACT

This paper presents a comparison between the Hillerborg Method and the Plastic Hinges Theory, based on Rectangular Elastic Slabs. Hillerborg's application to the dimensioning of slabs consists in obtaining a distribution of moments that satisfy the boundary and equilibrium conditions with the applied load. A satisfactory distribution would be the one in which the twisting moments were zero. This method was called Tracks' Simplified Method by Hillerborg. This way, the total calculation of the moments in a plate was converted to obtain moments in several “Beams-Bands”, where all the calculating methods of moments in beams can be used. In Plastic Hinges Theory application the values of the elastic moments in slabs with uniform loads are used for pre-sizing, based on CZERNY tables. Considering for the banding method the ruin setup of the slabs for the distribution of equivalent loads, identical results are obtained between the two methods.

KEYWORDS: Hillerborg Method. Plastic Hinges. Rectangle Plates..

1 - Doutora em Engenharia de Estruturas pela Universidade de São Paulo (USP). Docente do Centro Universitário de João Pessoa (UNIPÊ). E-mail: maria.xavier@unipe.br

2 - Doutorando em Engenharia Civil e Ambiental pela Universidade Federal da Paraíba (UFPB). Docente do Centro Universitário de João Pessoa (UNIPÊ). E-mail: wesley.gomes@unipe.br

INTRODUÇÃO

Pelo Teorema Estático da Análise Plástica de Estruturas, diz-se que todo o carregamento, em equilíbrio com uma distribuição de momentos que seja segura, (isto é, em nenhum ponto da distribuição existe momento fletor maior que o momento de plastificação) e que satisfaça as condições de fronteira estática do problema, é um carregamento inferior ao carregamento proporcional que provoca o colapso da estrutura.

O Método de Hillerborg consiste em utilizar o teorema estático como base para o dimensionamento das lajes (Placa) de concreto armado. De acordo com o teorema estático, cada campo de momento que seja estaticamente admissível, pode ser usado como base para o projeto de uma Laje. Logicamente nem todas as distribuições possíveis são igualmente satisfatórias. Uma distribuição de momento deve preencher os seguintes requisitos: A Solução deve resultar em um projeto econômico; O projeto deve verificar os Estados Limites de Utilização; e A solução deve conduzir a uma distribuição de armadura simples.

OBJETIVOS

OBJETIVO GERAL

Realizar a comparação entre o Método das Charneiras Plásticas e o Método de Hillerborg no cálculo dos esforços de Lajes Retangulares sob as diversas condições e apoios.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Realizar explanação sobre o cálculo dos esforços nas Lajes Retangulares pelos Métodos das Charneiras Plásticas e de Hillerborg e
- Obter os Momentos m_x, m_y, m'_x e m'_y para os casos de Lajes 1, 2A, 2B, 3, 4A, 4B, 5A, 5B e 6 pelo Método das Charneiras Plásticas e pelo Método de Hillerborg e compará-los.

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

MÉTODO SIMPLIFICADO DAS FAIXAS

A aplicação prática do Teorema Estático, ao dimensionamento de Lajes, consiste em obter uma distribuição de momentos que satisfaça às condições de contorno e de equilíbrio com o carregamento aplicado, ou seja, que satisfaça a equação:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -p \quad (1)$$

A Placa é então projetada em cada ponto, para esta distribuição de momentos. Na publicação sobre o Método das Faixas, Hillerborg (1975) sugeriu que uma maneira simples de determinar esta distribuição de momentos, estaticamente admissível, seria considerar uma distribuição na qual os momentos de torção fossem nulos, ou seja, (exceto aqueles casos em que o carregamento fosse suportado basicamente por efeitos de torção). Este método foi então denominado, por Hillerborg, de Método Simplificado das Faixas. Desta maneira, a equação (1) transforma-se em:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -p \quad (2)$$

Pode-se dividir a equação (2) em duas, ou seja:

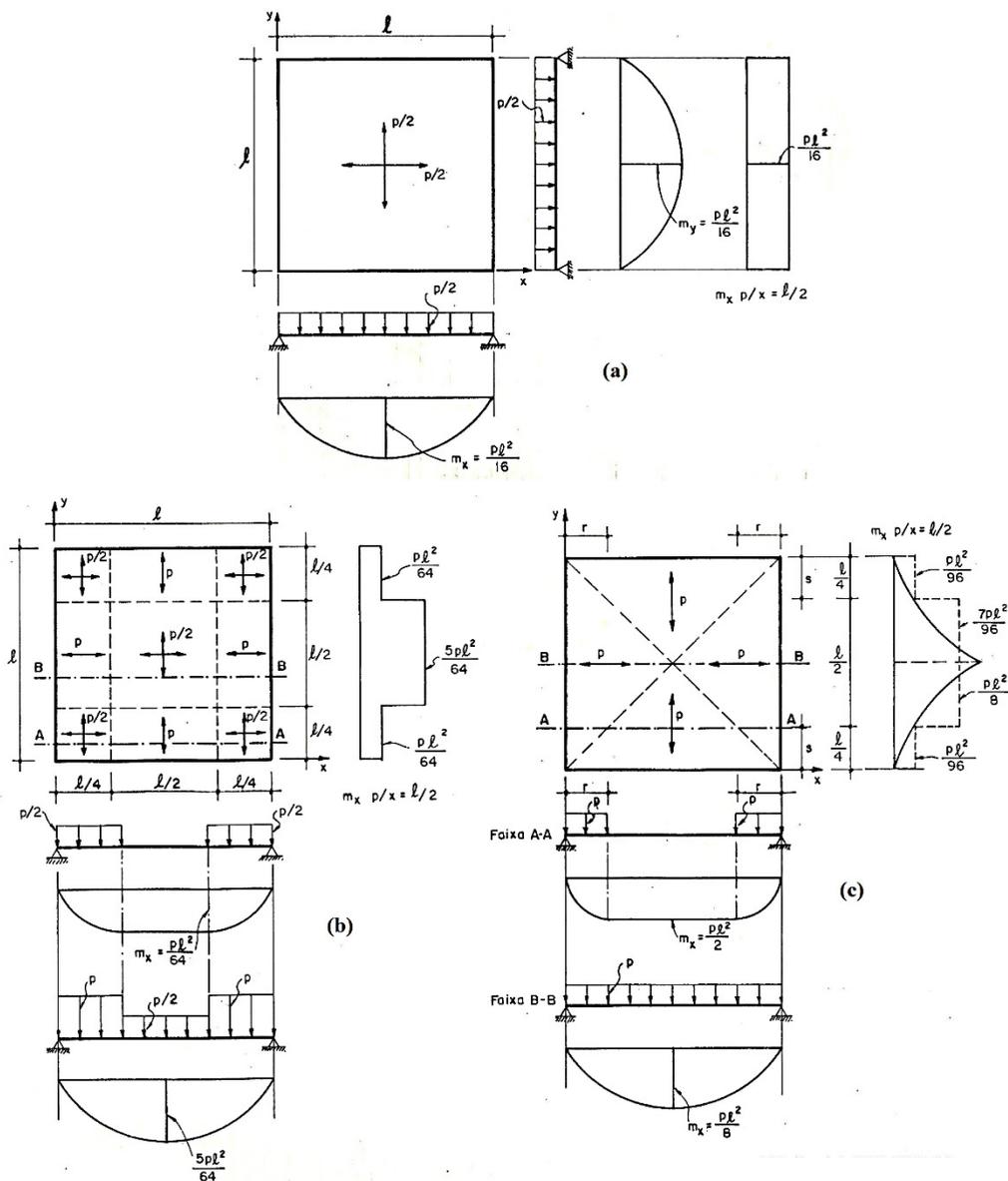
$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} = -p_x \quad ; \quad \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -p_y \quad ; \quad p = p_x + p_y \quad (3 \text{ a - c})$$

Uma solução da equação de equilíbrio para placa, pode ser obtida dividindo-se a carga em duas partes, p_x e p_y , e através das equações (3 a – b) determinam-se os momentos m_x e m_y . Além das equações de equilíbrio, as condições de contorno também devem ser obedecidas. Por exemplo: se um bordo paralelo ao eixo y é apoiado, $m_x = 0$. Caso seja Bordo livre, tem-se: $m_x = 0$ e $\frac{\partial m_x}{\partial x} = Q_x = 0$. Nota-se que as equações (3 a – b) e as condições de contorno são análogas às que regem o comportamento de vigas. É possível então tratar cada faixa da placa paralela, por exemplo, ao eixo x como uma “Viga Faixa”, suportando uma carga p_x . O cálculo total dos momentos em uma placa foi convertido em cálculo dos momentos em diversas “Vigas Faixa”, em que todos os métodos de cálculo de momentos em vigas podem ser usados.

LAJE QUADRADA SIMPLEMENTE APOIADA

Analisando a configuração de laje retangular para três abordagens distintas de subdivisão das cargas em faixas, a primeira configuração consiste em dividir a carga em duas partes iguais de uma maneira que: $p_x = p_y = 0,5 \cdot p$, conforme apresentado na Figura 1(a). A segunda maneira adotando que a carga que age próxima aos apoios seja conduzida pelo caminho mais curto (direção perpendicular) e que a carga próxima a diagonal seja dividida em duas partes iguais (uma para cada direção), vide Figura 1 (b). A terceira configuração é apresentada na Figura 1(c), sendo pautada na distribuição da armadura variando continuamente.

Figura 1: Lajes Quadradas: (a) – 1ª, (b) – 2ª e (c) – 3ª configurações



Fonte: Adaptado de (HILLERBORG, 1975)

Se a quantidade de armadura em cada direção fosse proporcional ao valor do respectivo momento e se cada faixa paralela aos lados fosse armada para o momento máximo, podia-se comparar os três casos através dos momentos médios máximos em uma direção. Isto resulta em, para a Figura 1 (a) e (b), respectivamente:

$$m_{x,med} = m_{y,med} = 6,25 \cdot \frac{p \cdot l^2}{100}$$

$$m_{x,med} = m_{y,med} = 4,6875 \cdot \frac{p \cdot l^2}{100} \quad (4 a - b)$$

A solução da Laje quadrada, indicada na Figura 1 (c), através da Teoria das Charneiras Plásticas forneceu os seguintes valores, via Momentos Médios e Charneiras Plásticas, respectivamente:

$$m_{x,med} = m_{y,med} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{l} \cdot \frac{p \cdot l^2}{8} \cdot l = \frac{p \cdot l^2}{24} = 0,041667 \cdot p \cdot l^2 \quad (4 c)$$

$$m_x = m_y = 4,1667 \cdot \frac{p \cdot l^2}{100} = 0,041667 \cdot p \cdot l^2 \quad (4 d)$$

O resultado obtido na primeira configuração, figura 1 (a), é 35% maior que o valor obtido pela Teoria das Charneiras Plásticas. Esta solução não é, evidentemente, satisfatória do ponto de vista de economia da armadura. Na segunda configuração, obtém-se um valor levemente superior ao valor obtido via Charneiras Plásticas e se a quantidade de armadura é proporcional ao momento, esta solução corresponde também a uma igual economia de armadura. Reforçando que de acordo com a Teoria da Plasticidade, o Teorema Estático conduz sempre a resultados considerados seguros.

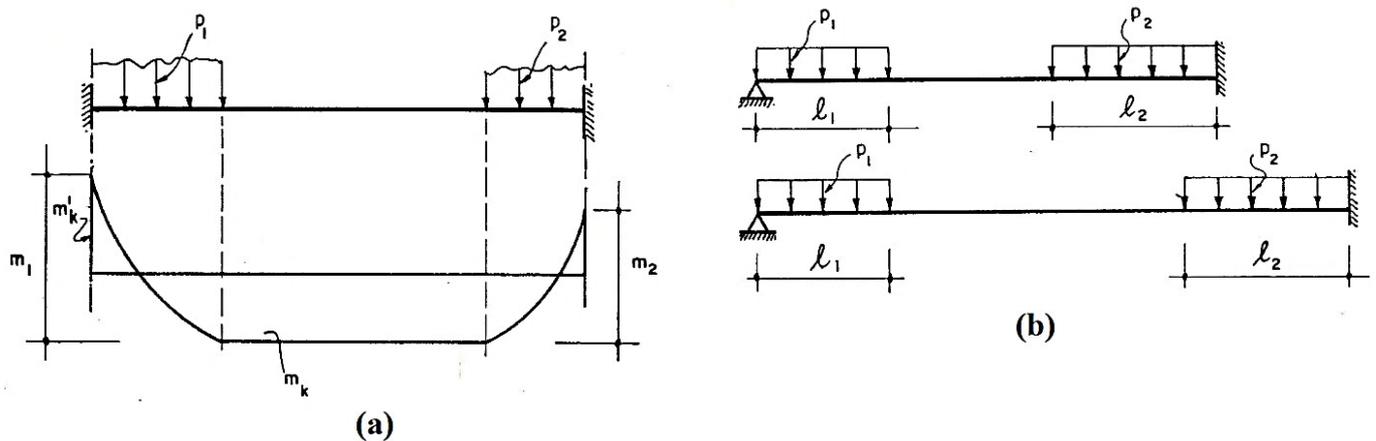
Na configuração apresentada na Figura 1 (c), terceira forma, conduz a um valor de momento igual ao obtido pela Teoria das Charneiras Plásticas. Pode-se então concluir que este caso seja o mais econômico, embora seja pouco prático armar a laje com uma distribuição de armadura variando continuamente. A fim de se obter uma distribuição de armadura mais satisfatória e econômica pode-se dimensioná-la para um momento médio através de certa largura (a largura sendo entendida como a direção perpendicular as barras). Quando este método é aplicado, deve-se observar que os princípios fundamentais do Teorema Estático não são estritamente observados, conforme pode-se verificar através do diagrama em Linha pontilhada na Figura 1 (c).

SUPOSIÇÕES SIMPLIFICADORAS

Quando se utiliza o Método das Faixas, alguns cálculos estáticos são frequentemente repetidos. Isto pode ser evitado estabelecendo-se algumas regras simplificadoras. Normalmente aparecem faixas carregadas apenas nas proximidades dos apoios, com o vão central descarregado, conforme Figura 2 (a). Se estas faixas têm pequena influência na capacidade total de carga da laje e suportam pequenos momentos então é possível utilizarem-se algumas simplificações no cálculo. Ainda de acordo com a Figura 2 (a), $m_i (i = 1, 2)$, corresponde a soma do momento negativo (momento no engaste) e momento positivo (momento no vão). Esta soma m_i depende apenas das condições reais de vinculação da “viga-faixa” e é numericamente igual ao valor do momento de engastamento de uma viga engastada e livre com carga p_i .

A regra de cálculo consiste em: primeiro calculem-se os valores de m_1 e m_2 , e depois escolhem-se os valores dos momentos no vão, de maneira que o vão central tenha momento constante, obtendo-se em seguida os respectivos momentos no engaste. Os momentos numa faixa deste tipo são independentes do comprimento da parte central descarregada, e dependem somente da carga e do correspondente comprimento da parte próxima aos apoios. Isto significa dizer que a parte carregada pode variar através da faixa sem afetar a distribuição de momentos, conforme Figura 2 (b).

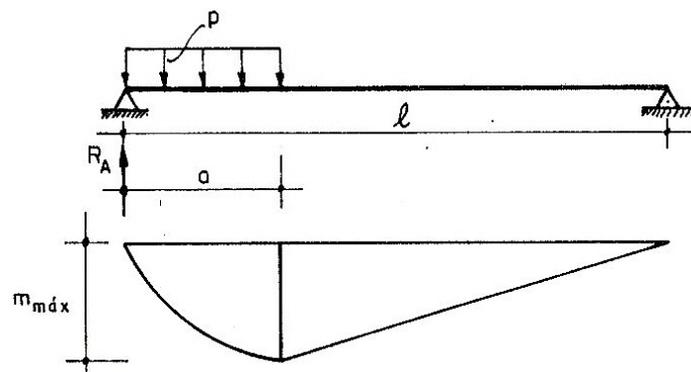
Figura 2: Distribuição de Momentos: (a) Viga-Faixa carregada nas proximidades dos apoios, (b) Irrelevância do comprimento da faixa



Fonte: Adaptado de (HILLERBORG, 1975)

Mesmo como ilustrado na figura 2(a), a distribuição de momentos é constante no vão descarregado. Em alguns casos este tipo de distribuição pode ser de difícil obtenção, principalmente se apenas uma extremidade da faixa é carregada, igual apresentado na Figura 3.

Figura 3: Distribuição de Momentos na Viga-Faixa carregada apenas próxima de um apoio



Fonte: Adaptado de (HILLERBORG, 1975)

Para a configuração apresentada na Figura 3 é relevante mencionar que o momento fletor máximo será:

$$m_{max} = \frac{pa^2}{2} \left(1 - \frac{a}{2l}\right)^2 \quad (5 a)$$

Em termos momento , obtém-se o momento máximo obtido na equação (5 a) como:

$$m_{max} = m_k \left(1 - \frac{a}{2l}\right)^2 \quad (5 b)$$

Onde: $m_k = \frac{pa^2}{2}$

Através da equação (5 b), observa-se que o momento máximo (m_{max}) é sempre menor que (m_k) . Isto significa dizer, que considerando-se (m_k) como o máximo momento positivo, as armaduras da faixa são projetadas sempre a favor da segurança.

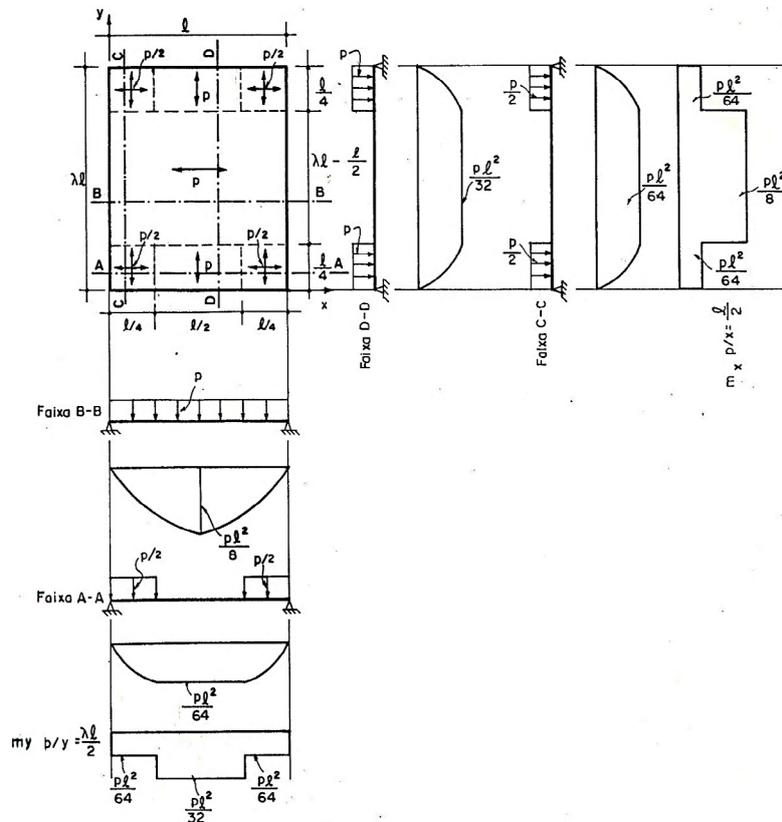
Como Regra Geral, a distribuição de momentos em uma faixa com uma parte do vão descarregada, pode ser obtida calculando-se primeiramente os momentos de engastamento m_i , nas extremidades. Se a vinculação da borda é engaste, o momento m_i é dividido entre o momento de engastamento (m'_k) e o momento no vão (m_k). Se a vinculação consiste de um apoio fixo m_i , o momento torna-se o momento no vão (m_k).

Quando calcular as reações e, tais casos, é suficientemente exato assumir que a carga é suportada diretamente pelo apoio mais próximo. Contudo, se o apoio corresponde a uma outra faixa em outra direção, necessita-se de um cálculo mais exato.

LAJE RETANGULAR SIMPLEMENTE APOIADA

Para este tipo de laje, o Método de Hillerborg sugere a distribuição de carga indicada na Figura 4. Observando-se que esta distribuição de carga é semelhante aquela, indicada na Figura 1 (b), da laje quadrada.

Figura 4: Configurações das Faixas pelo Método de Hillerborg para a Laje Retangular



Fonte: Adaptado de (HILLERBORG, 1975)

Sendo o coeficiente λ definido pela relação do vão l_x por l_y , calcula-se o momento na direção x e y pelo diagrama de m_x e m_y apresentados na Figura 4, da seguinte maneira e simplificando o momento na direção x para a razão ($\lambda = 1,5$):

$$m_x = \frac{1}{\lambda l} \left[2 \cdot \frac{pl^2}{64} \cdot \frac{l}{4} + \frac{pl^2}{8} \left(\lambda l - \frac{l}{2} \right) \right] = 8,854 \cdot \frac{pl^2}{100}$$

$$m_y = \frac{1}{l} \left[2 \cdot \frac{pl^2}{64} \cdot \frac{l}{4} + \frac{pl^2}{32} \cdot \frac{l}{2} \right] = 2,344 \cdot \frac{pl^2}{100} \quad (6 a - b)$$

Pela Teoria das Charneiras Plásticas, obtém-se os momentos nas direções x e y para esta laje com a mesma relação de vãos:

$$m_x = 7,084 \cdot \frac{pl^2}{100}$$

$$m_y = 3,961 \cdot \frac{pl^2}{100} \quad (7 a - b)$$

TEORIA DAS CHARNEIRAS PLÁSTICAS

Neste item utilizam-se para efeito de pré-dimensionamento, as tabelas elaboradas por Nakao et al (1987), que fornecem os valores dos momentos elásticos em lajes com carga uniforme, isto baseado em CZERNY. Para a determinação dos momentos de plastificação, utiliza-se o roteiro de cálculo para Lajes Ortótropas de acordo com Pinheiro (1988) e Johansen (1962).

São definições necessárias para o Cálculo Plástico:

a: Dimensão do menor vão (direção x);

b: Dimensão do maior vão (direção y);

k: índice de ortotropia (obtido via pré-dimensionamento) $k = \frac{m_y}{m_x}$;

φ_i : Índice de engastamento ($i=1,2,3,4$), obtido via pré-dimensionamento;

m: Momento de Plastificação;

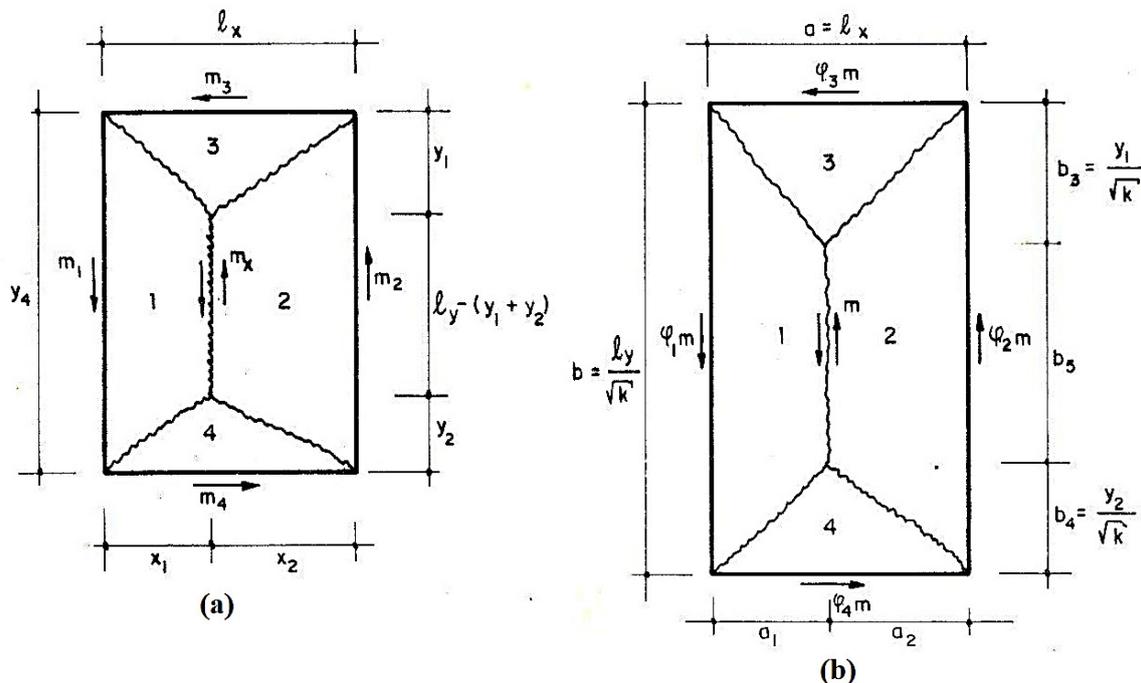
p: Carga uniformemente distribuída;

Também é importante definir a Configuração Comum que consiste na ruína que apresenta a charneira central paralela a maior dimensão e a Configuração Eventual, na qual a charneira central é paralela a menor dimensão.

ROTEIRO DE CÁLCULO NA CONFIGURAÇÃO COMUM

Nos problemas usuais são conhecidos l_x , l_y e p . Através do pré-dimensionamento determinam-se os valores de k , índice de ortotropia, e φ_i , índice de engastamento. Conforme apresentado na Figura 5.

Figura 5: Notação para a Configuração Comum: (a) Laje Ortótropa e (b) Laje Isótropa Afim



A partir dos valores e dimensões apresentadas na Figura 5, calcula-se os coeficientes a_r , b_r e c , via as equações (8 a - c):

$$a_r = \frac{2a}{\sqrt{1 + \varphi_1} + \sqrt{1 + \varphi_2}} \quad ; \quad b_r = \frac{2b}{\sqrt{1 + \varphi_3} + \sqrt{1 + \varphi_4}}$$

$$c = \frac{a_r}{2} \left[\sqrt{3 + \left(\frac{a_r}{b_r}\right)^2} - \frac{a_r}{b_r} \right] \quad (8 a - c)$$

Se o coeficiente c não for superior a metade de b_r , a configuração adotada é a Comum e em caso contrário utiliza-se a configuração eventual. Baseado nas equações (8 a - c), obtém-se:

$$a_1 = \frac{a_r}{2} \sqrt{1 + \varphi_1} \quad ; \quad a_2 = \frac{a_r}{2} \sqrt{1 + \varphi_2} \quad ; \quad b_3 = c \sqrt{1 + \varphi_3} \quad ; \quad b_4 = c \sqrt{1 + \varphi_4}$$

$$x_1 = a_1 \quad ; \quad x_2 = a_2 \quad ; \quad y_1 = b_3 \sqrt{k} \quad ; \quad y_2 = b_4 \sqrt{k} \quad (9 a - h)$$

O Momento de Plastificação e os demais momentos são obtidos via:

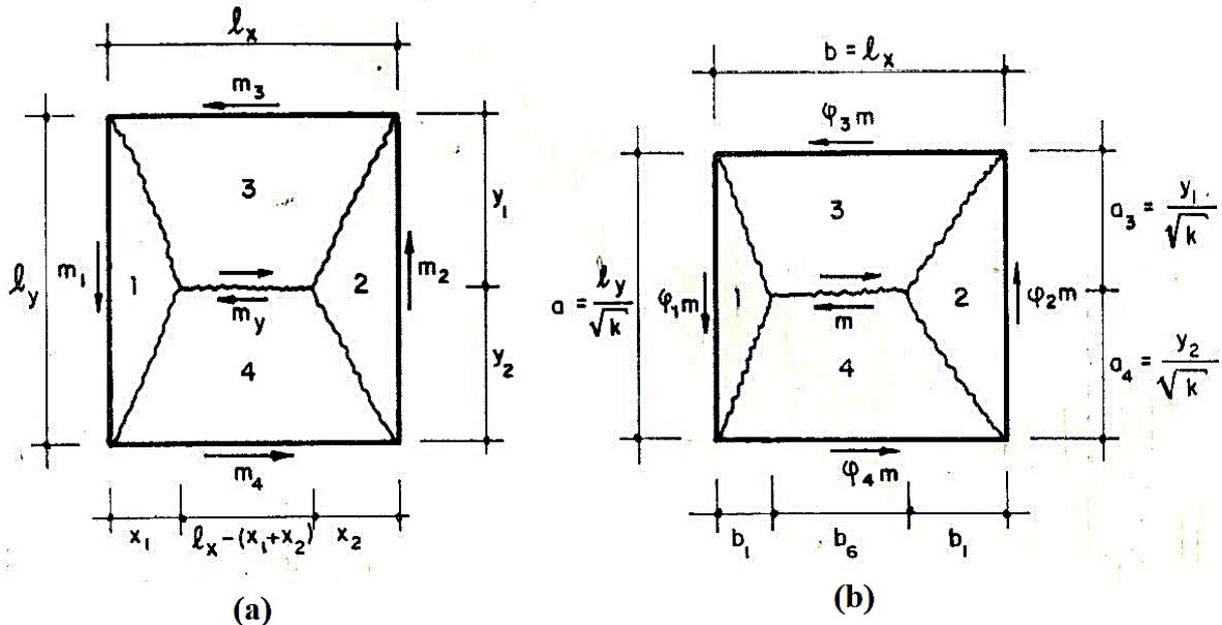
$$m = \frac{pc^2}{6} ; \quad m_x = m ; \quad m_y = m.k ; \quad m_1 = \varphi_1.m$$

$$m_2 = \varphi_2.m ; \quad m_3 = \varphi_3.m ; \quad m_4 = \varphi_4.m \quad (10 a - g)$$

ROTEIRO DE CÁLCULO NA CONFIGURAÇÃO EVENTUAL

Para o caso em que λ for menor que a metade de c . Conforme apresentado na Figura 6.

Figura 6: Notação para a Configuração Eventual: (a) Laje Ortótropa e (b) Laje Isótropa Afim



As equações para o cálculo de a_r e b_r , são:

$$a_r = \frac{2a}{\sqrt{1 + \varphi_3} + \sqrt{1 + \varphi_4}} ; \quad b_r = \frac{2b}{\sqrt{1 + \varphi_1} + \sqrt{1 + \varphi_2}} \quad (11 a - b)$$

Permanecendo válidas as equações (8 c) e (10 a - g).

Com os valores fornecidos pelas equações (8 c) e (11 a - b), obtém-se:

$$a_3 = \frac{a_r}{2} \sqrt{1 + \varphi_3} ; \quad a_4 = \frac{a_r}{2} \sqrt{1 + \varphi_4} ; \quad b_1 = c \sqrt{1 + \varphi_1} ; \quad b_2 = c \sqrt{1 + \varphi_2}$$

$$x_1 = b_1 ; \quad x_2 = b_2 ; \quad y_1 = a_3 \sqrt{k} ; \quad y_2 = a_4 \sqrt{k} \quad (12 a - h)$$

CÁLCULO DA LAJE DO TIPO 1

Adotando-se para a razão de comprimentos λ o valor de 1,5 e as tabelas elaboradas por Nakoa et al. (1987) fornecem as equações:

$$\mu_x = -2,46.\lambda^2 + 13,07.\lambda - 6,20 = 7,87 ; \quad \mu_y = 4,40$$

$$m_x = 7,87 \frac{pl^2}{100} ; \quad m_y = 4,40 \frac{pl^2}{100} ; \quad k = \frac{m_x}{m_y} = 0,5591$$

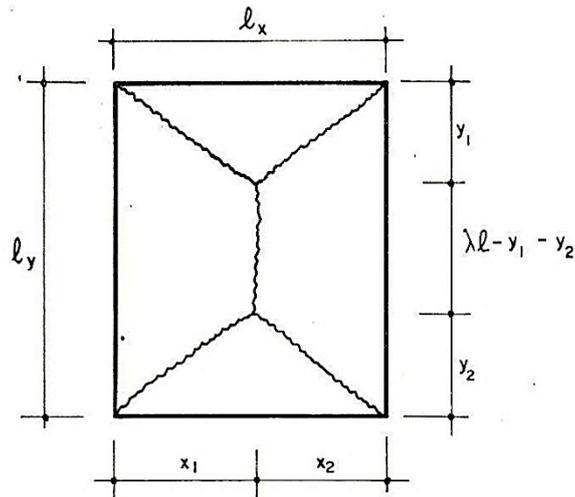
Os índices de engastamento são todos nulos, pois a laje é simplesmente apoiada, isto é, $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 0$. De acordo com as equações (8 a - c) para a Configuração $l_x = l, l_y = \lambda.l, a = l_x$ e $b = \frac{l_y}{\sqrt{k}}$, obtém-se que:

$$a_r = \frac{2l}{l} = l \quad ; \quad b_r = \frac{2 \frac{1,5l}{\sqrt{0,5591}}}{2} = 2,0061.l$$

$$c = \frac{l}{2} \left[\sqrt{3 + \left(\frac{l}{2,0061.l} \right)^2} - \left(\frac{l}{2,0061.l} \right) \right] = -0,65194.l$$

Como c é menor que a metade de b_r , logo a configuração de ruína será a Comum e conforme ilustrado na Figura 7.

Figura 7: Laje simplesmente apoiada (Tipo 1) com Configuração Comum



Utilizando as equações (9 a - h), determina-se os comprimentos a, b, x e y :

$$a_1 = a_2 = 0,5 l \quad ; \quad b_3 = b_4 = 0,65194 l \quad ; \quad x_1 = x_2 = 0,5 l \quad ; \quad y_1 = y_2 = 0,4875 l$$

O Momento de Plastificação, expresso pela equação (10 a), resulta em:

$$m = 7,084 \frac{pl^2}{100}$$

Com as equações (10 b - c), obtém-se:

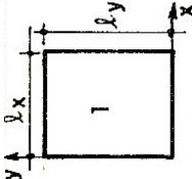
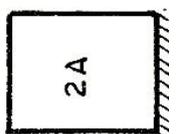
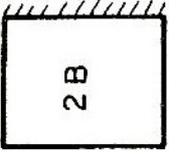
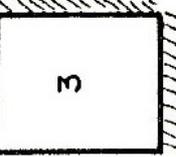
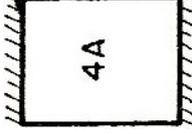
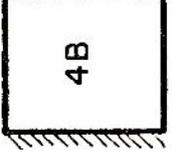
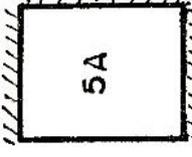
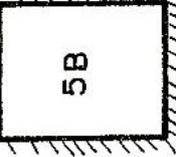
$$m_x = 7,084 \frac{pl^2}{100} \quad ; \quad m_y = 3,961 \frac{pl^2}{100}$$

TABULAÇÃO PARA OS DEMAIS TIPOS DE LAJES

Repetindo-se os roteiros de cálculo para os demais tipos de Lajes Retangulares, com carga uniformemente distribuída e de forma adequada entre as Configurações Comum e Eventual; Obtém-se para os valores dos momentos: m_x, m_y, m'_x e m'_y . Também são utilizadas as cotas da configuração de ruína. Os valores dos referidos cálculos são indicados na Tabela 1.

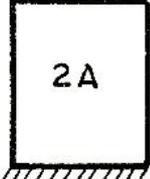
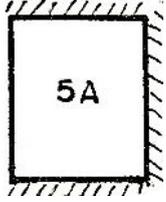
As Lajes dos Tipos (2A) e (5A) apresentam configuração de ruína eventual para os valores da razão $\lambda = 1,25$ e $\lambda = 1,10$ respectivamente. Na Tabela 2 indicam-se os valores dos momentos e as cotas das Charneiras Plásticas.

Tabela 1: Cálculo de Lajes Retangulares via Charneiras Plásticas

TIPO									
	7,8700	6,6500	5,4175	4,8750	5,5200	4,1800	4,3325	3,8950	3,5875
	-----	-----	11,1100	10,4275	-----	8,3325	9,4300	7,9925	7,5725
	4,4000	4,3325	2,8400	2,7800	4,1025	2,1000	2,6075	2,0400	1,7450
	-----	11,2325	-----	8,0550	10,5325	-----	7,8825	5,7100	5,7050
	0,5591	0,6515	0,5242	0,5703	0,7432	0,5024	0,6018	0,5237	0,4864
	-----	-----	-----	-----	-----	1,9934	-----	2,0520	2,1108
	-----	-----	2,0508	2,1390	-----	1,9934	2,1766	2,0520	2,1108
	-----	-----	-----	-----	2,5673	-----	3,0230	-----	3,2693
	-----	2,5926	-----	2,8975	2,5673	-----	3,0230	2,7990	3,2693
Cálculo Plástico para									
	0,5000	0,5000	0,3638	0,3638	0,4793	0,5000	0,3594	0,5000	0,5000
	0,5000	0,5000	0,6362	0,6392	0,4793	0,5000	0,6406	0,5000	0,5000
	0,4875	0,4521	0,3730	0,3471	0,7500	0,3032	0,6376	0,2842	0,5227
	0,4875	0,8569	0,3730	0,6853	0,7500	0,3032	0,6376	0,5539	0,5227
	7,0840	5,2280	4,4238	3,5219	3,8287	3,0502	2,7984	2,5702	2,1637
	-----	-----	9,0722	7,5336	-----	6,0803	6,0910	5,2741	4,5671
	3,9610	3,4064	2,3191	2,0084	2,8455	1,5324	1,6842	1,3461	1,0525
	-----	8,8315	-----	5,8193	7,3054	-----	5,0914	3,7677	3,4410
Ruína	Comum	Comum	Comum	Comum	Eventual	Comum	Comum	Comum	Comum

Os valores e devem ser multiplicados por

Tabela 2: Cálculo de Lajes Retangulares via Charneiras Plásticas – Tipos 2A e 5A na Configuração de Ruína Eventual

TIPO		
Pré-dimensionamento		
	1,25	1,10
	4,9912	2,7285
	-----	6,4172
	4,2819	2,7131
	10,0506	6,6361
	0,8579	0,9943
	-----	-----
	-----	2,3519
	-----	2,4459
	2,3472	2,4459
Cálculo Plástico		
	0,4881	0,3222
	0,4881	0,5899
	0,4420	0,5500
	0,8080	0,5500
	3,9713	1,7301
	-----	4,0690
	3,4069	1,7203
	3,4069	4,2078
Ruína	Eventual	Eventual
Os valores μ e μ_{pl} devem ser multiplicados por		

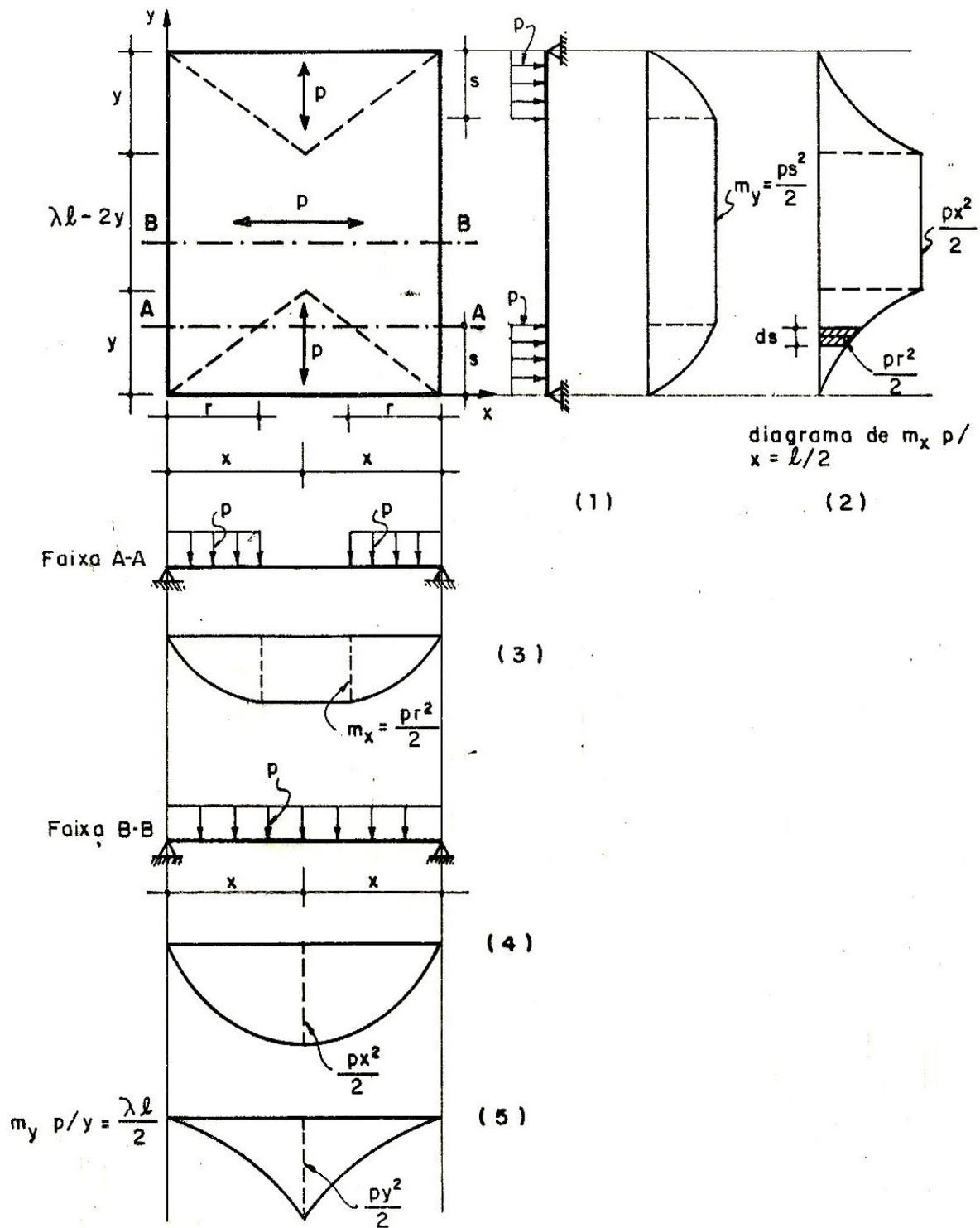
MÉTODO DE HILLERBORG

De maneira análoga ao cálculo realizado para a Laje quadrada apresentada na Figura 1(c), admite-se aqui repartições de carga equivalentes as configurações das Charneiras Plásticas. Utilizando-se este critério, calculam-se os diversos tipos de lajes retangulares, com carga distribuída, indicadas na Tabela 1.

3.6.1. Laje Retangular do Tipo 1

Na Figura 8 é detalhada a repartição de carga para o Tipo 1 da Laje Retangular.

Figura 8: Laje simplesmente apoiada (Tipo 1) via Método de Hillerborg



De acordo com o diagrama (5) apresentando na Figura 8 e relação de semelhança de triângulos na referida figura, chega-se:

$$m_x = \frac{px^2}{6} \left[3 - \frac{4y}{\lambda l} \right] ; \quad m_y = \frac{py^2}{6} \quad (13 a - b)$$

Adotando-se a razão de comprimentos ($\lambda = 1,5$), o mesmo da Tabela 1, tem-se:

$$x = 0,5.l \quad ; \quad y = 0,4875.l$$

$$m_x = 7,083 \frac{pl^2}{100} \quad ; \quad m_y = 3,961 \frac{pl^2}{100} \quad (14 a - d)$$

LAJE RETANGULAR DO TIPO 2A

CONFIGURAÇÃO DE RUÍNA COMUM

Na Figura 9 (a) é detalhada a repartição de carga para o Tipo 2A da Laje Retangular. De acordo com os diagramas (2) e (5) apresentando na Figura 9 (a) e relação de semelhança de triângulos na referida figura, chega-se:

$$m_x = \frac{px^2}{6} \left[3 - 2 \frac{(y_1 + y_2)}{\lambda l} \right] ; \quad m_y = \frac{py_1^2}{6} ; \quad m'_y = m_y \cdot (\psi_1^2 - 1) \quad (15 a - c)$$

O coeficiente ψ_1 será a razão das dimensões y_2 por y_1 . Adotando-se a razão de comprimentos, ($\lambda = 1,5$) o mesmo da Tabela 1, tem-se:

$$x = 0,5.l ; \quad y_1 = 0,4521.l ; \quad y_2 = 0,8569.l ; \quad \psi_1 = 1,8954$$

$$m_x = 5,2278 \frac{pl^2}{100} ; \quad m_y = 3,4066 \frac{pl^2}{100} ; \quad m'_x = 8,8315 \frac{pl^2}{100} \quad (16 a - g)$$

b) Configuração de Ruína Eventual

Conforme é apresentado na Figura 9 (b) a repartição de carga para o Tipo 2A da Laje Retangular; E de acordo com os diagramas (3) e (5) apresentando na Figura 9 (b) e relação de semelhança de triângulos na referida figura, chega-se:

$$m_x = \frac{px^2}{6} ; \quad m_y = \frac{py_1^2}{6} \left[3 - 4 \frac{x_1}{l} \right] ; \quad m'_y = m_y \cdot (\psi_1^2 - 1) \quad (17 a - c)$$

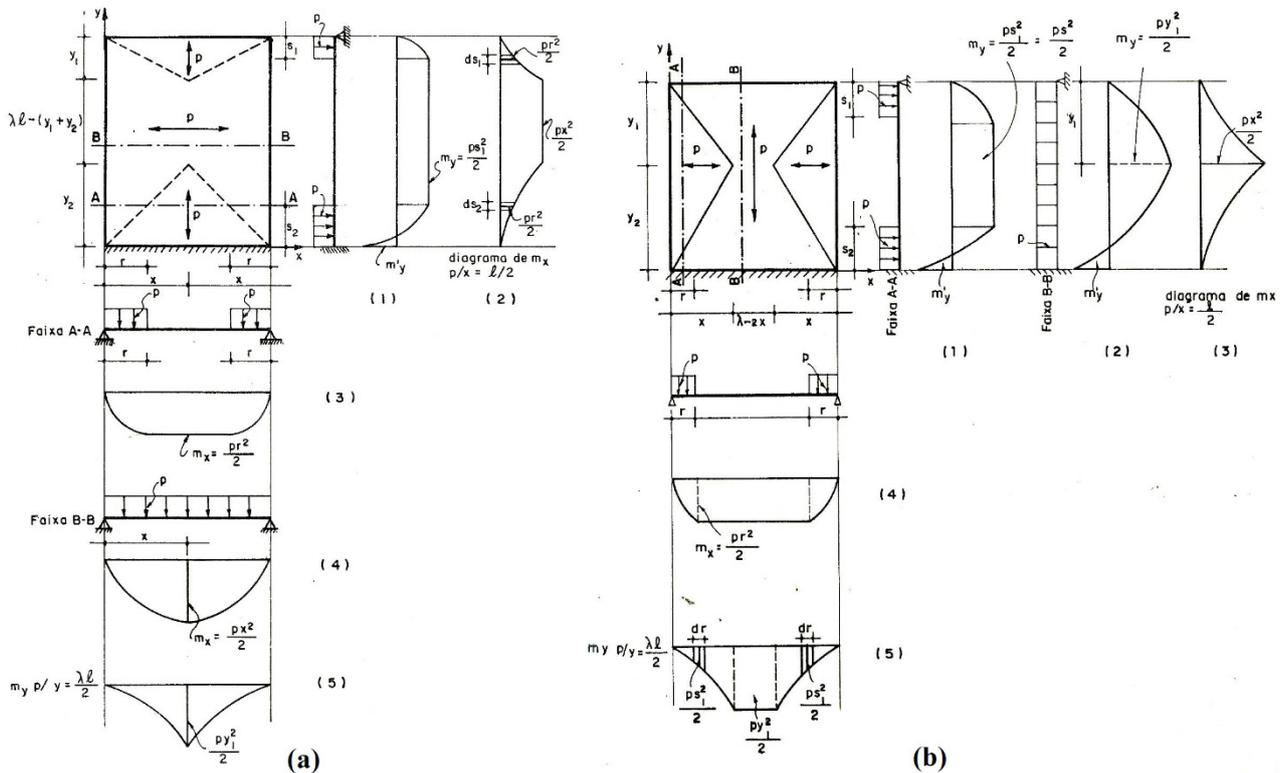
O coeficiente ψ_1 será a razão das dimensões y_2 por y_1 . Adotando-se a razão de comprimentos: $\lambda = 1,25$, o mesmo da Tabela 2, tem-se:

$$x = 0,488.l ; \quad y_1 = 0,442.l ; \quad y_2 = 0,808.l ; \quad \psi_1 = 1,8280$$

$$m_x = 3,9691 \frac{pl^2}{100} ; \quad m_y = 3,4124 \frac{pl^2}{100} ; \quad m'_y = 7,6244 \frac{pl^2}{100} \quad (18 a - g)$$

Conforme detalhado na Figura 9.

Figura 9: Laje do Tipo 2A para a Configuração de Ruína: (a) Comum e (b) Eventual



LAJES RETANGULARES DOS TIPOS 2B E 3

LAJE DO TIPO 2B

Na Figura 10 (a) é detalhada a repartição de carga para o Tipo 2B da Laje Retangular. De acordo com os diagramas (2), (4) e (5) e utilizando relação de semelhança de triângulos na referida figura, chega-se:

$$m_x = \frac{px_1^2}{6} \left[3 - 4 \frac{y_1}{\lambda l} \right] ; \quad m_y = \frac{py^2}{6} ; \quad m'_x = \frac{px_1^2}{2} \cdot (\psi_1^2 - 1) \quad (19 a - c)$$

O coeficiente ψ_1 será a razão das dimensões x_2 por x_1 . Adotando-se a razão de comprimentos, o mesmo da Tabela 1, ($\lambda = 1,5$) tem-se:

$$y = 0,373.l ; \quad x_1 = 0,364.l ; \quad x_2 = 0,636.l ; \quad \psi_1 = 1,7472$$

$$m_x = 4,428 \frac{pl^2}{100} ; \quad m_y = 2,319 \frac{pl^2}{100} ; \quad m'_x = 9,090 \frac{pl^2}{100} \quad (20 a - g)$$

LAJE DO TIPO 3

Conforme é apresentado na Figura 9 (b) a repartição de carga para o Tipo 3 da Laje Retangular; E de acordo com os diagramas (1), (3) e (4) apresentando na Figura 10 (b) e relação de semelhança de triângulos na referida figura, chega-se:

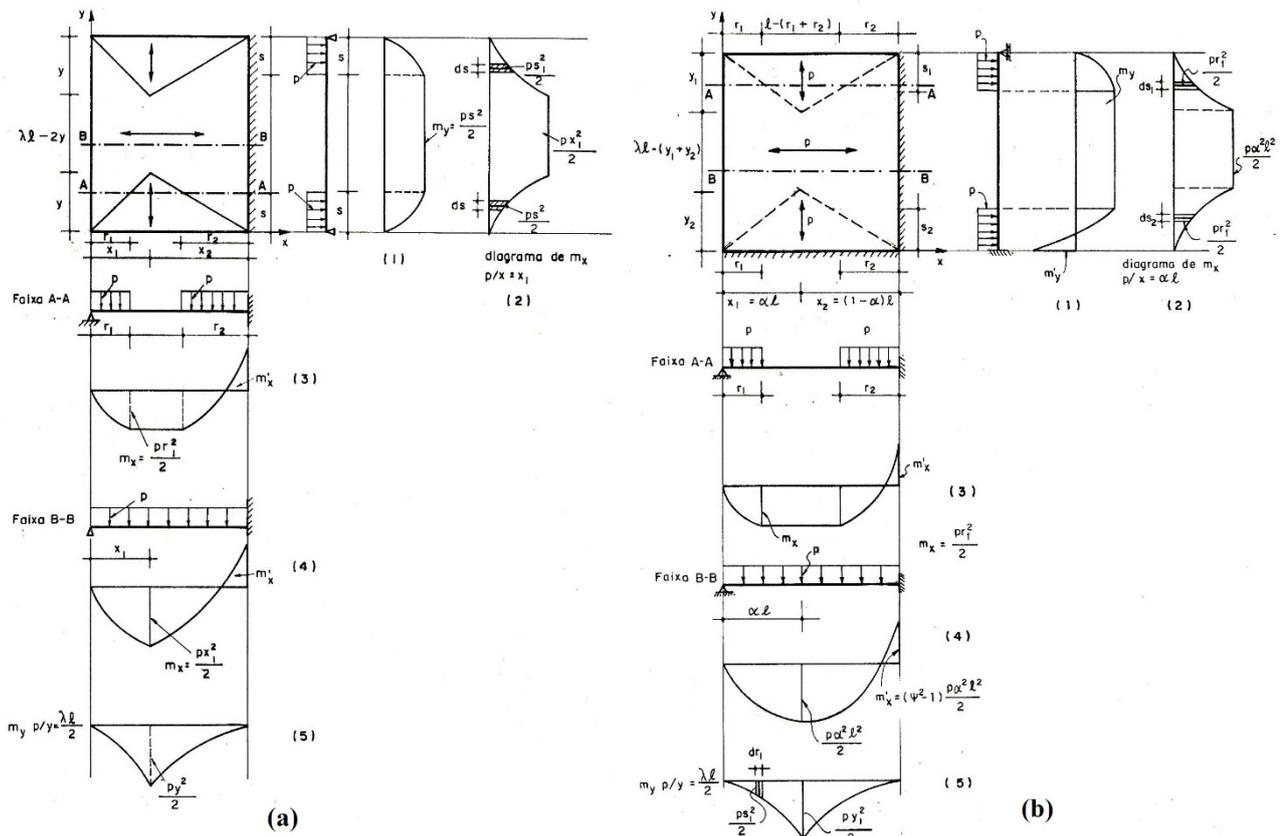
$$m_x = \frac{\alpha^2 pl^2}{6\lambda} \left[3\lambda - \frac{2}{l} (y_1 + y_2) \right] ; \quad m_y = \frac{py_1^2}{6} ; \quad m'_y = m_y \cdot (\psi_2^2 - 1) \quad (21 a - c)$$

O coeficiente ψ_1 será a razão das dimensões x_2 or x_1 ψ_2 rá a razão das dimensões y_2 por y_1 . Adotando-se a razão de comprimentos ($\lambda = 1,5$), o mesmo da Tabela 1, tem-se:

$$x_1 = 0,3608.l ; \quad x_2 = 0,6392.l ; \quad y_1 = 0,3471.l ; \quad y_2 = 0,6853.l ; \quad \psi_1 = 1,7717 ; \quad \psi_2 = 1,9742$$

$$m_x = 3,5219 \frac{pl^2}{100} ; \quad m'_x = 7,5333 \frac{pl^2}{100} ; \quad m_y = 2,0084 \frac{pl^2}{100} ; \quad m'_y = 5,8193 \frac{pl^2}{100} \quad (22 a - j)$$

Figura 10: Laje sob Configuração de Ruína Comum: (a) Tipo 2B e (b) Tipo 3



LAJES RETANGULARES DOS TIPOS 4A E 4B

LAJE DO TIPO 4A

Na Figura 11 (a) é detalhada a repartição de carga para o Tipo 4A da Laje Retangular. De acordo com os diagramas (1), (2) e (5) e utilizando relação de semelhança de triângulos na referida figura, chega-se:

$$m_x = \frac{px^2}{6} ; m_y = \frac{p\lambda^2 l^2}{12(\psi + 1)} \left[\frac{x}{l} + 6\beta^2 \left(1 - \frac{2x}{l} \right) \right] ; m'_y = m_y \cdot \psi \quad (23 a - b)$$

O coeficiente ψ é igual a φ_1 e φ_2 e vale 2,5673. Adotando-se a razão de comprimentos ($\lambda = 1,5$), o mesmo da Tabela 1, tem-se:

$$y = 0,75.l ; x = 0,4793.l ; \beta = 0,5$$

$$m_x = 3,8287 \frac{pl^2}{100} ; m_y = 2,8457 \frac{pl^2}{100} ; m'_y = 7,3058 \frac{pl^2}{100} \quad (24 a - f)$$

LAJE DO TIPO 4B

Conforme é apresentado na Figura 11 (b) a repartição de carga para o Tipo 4B da Laje Retangular; E de acordo com os diagramas (3), (4) e (5) apresentando na referida figura e relação de semelhança de triângulos, chega-se:

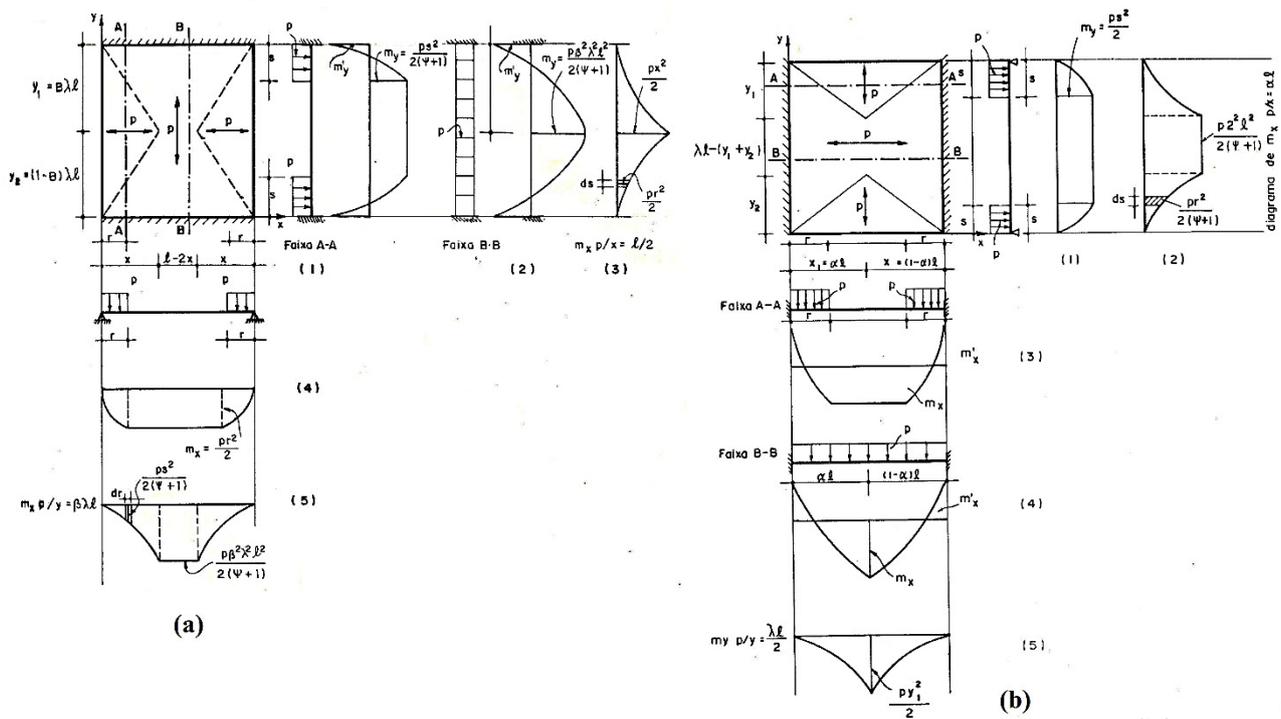
$$m_x = \frac{p\alpha^2 l^2}{6(\psi + 1)} \left[3 - \frac{4y}{\lambda l} \right] ; m_y = \frac{py_1^2}{6} ; m'_x = m_x \cdot \psi \quad (25 a - c)$$

O coeficiente ψ é igual a φ_1 e φ_2 e vale 1,9934. Adotando-se a razão de comprimentos ($\lambda = 1,5$), o mesmo da Tabela 1, tem-se:

$$x_1 = 0,5.l ; y = y_1 = y_2 = 0,3471.l ; \alpha = 0,5$$

$$m_x = 3,050 \frac{pl^2}{100} ; m'_x = 6,081 \frac{pl^2}{100} ; m_y = 1,532 \frac{pl^2}{100} \quad (26 a - f)$$

Figura 11: Laje sob Configuração de Ruína Comum: (a) Tipo 4A e (b) Tipo 4B



LAJE RETANGULAR DO TIPO 5A

CONFIGURAÇÃO DE RUÍNA COMUM

Na Figura 12 (a) é detalhada a repartição de carga para o Tipo 5A da Laje Retangular. De acordo com todos os diagramas de momentos apresentando na referida figura e relação de semelhança de triângulos, chega-se:

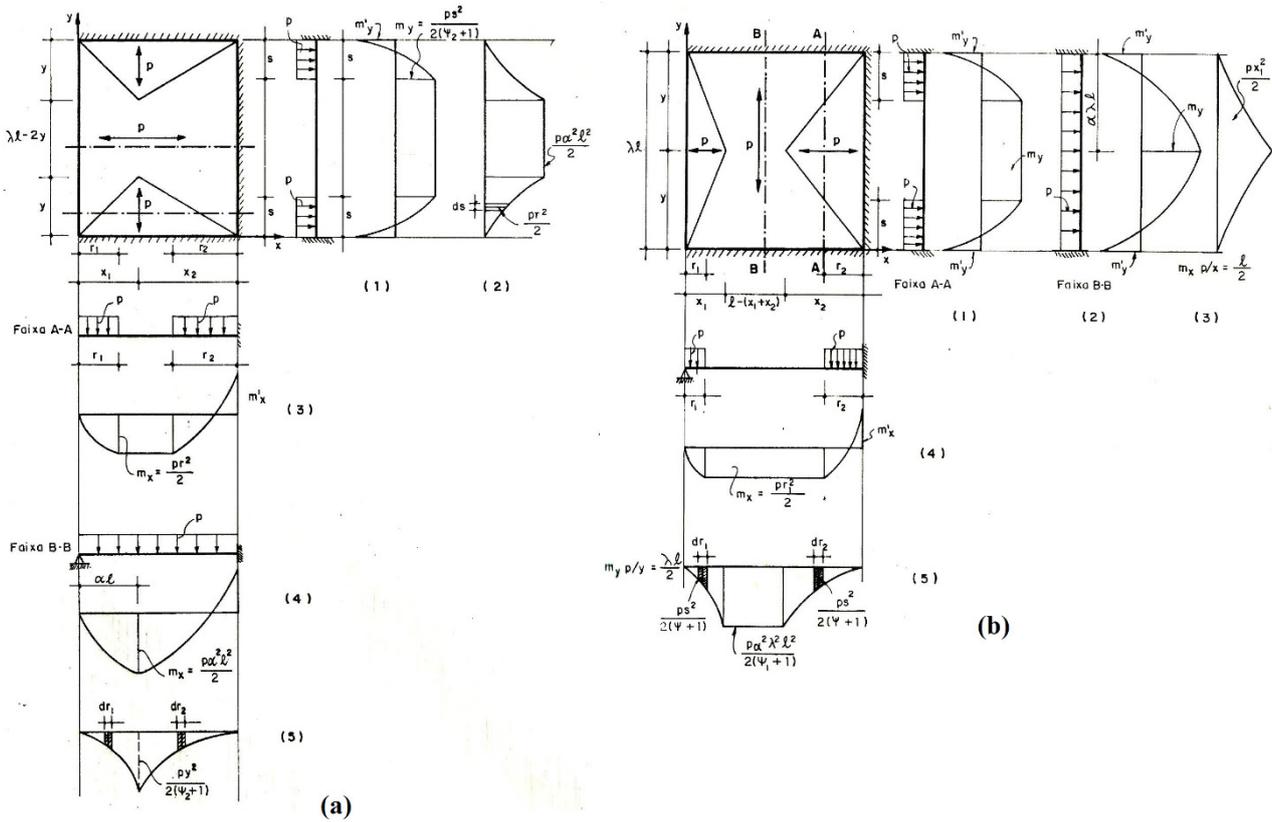
O coeficiente será a razão das dimensões por e é igual a e vale 3,0230. Adotando-se a razão de comprimentos, o mesmo da Tabela 1, tem-se:

CONFIGURAÇÃO DE RUÍNA EVENTUAL

Conforme é apresentado na Figura 12 (b) a repartição de carga para o Tipo 5A da Laje Retangular; E de acordo com os diagramas (2), (3) e (4) e relação de semelhança de triângulos na referida figura, chega-se:

O coeficiente é igual a e valendo 2,4459 e será a razão das dimensões por . Adotando-se a razão de comprimentos, o mesmo da Tabela 2, tem-se:

Figura 12: Laje do Tipo 5A para a Configuração de Ruína: (a) Comum e (b) Eventual



LAJES RETANGULARES DOS TIPOS 5B E 6

LAJE DO TIPO 5B

Na Figura 13 (a) é detalhada a repartição de carga para o Tipo 5B da Laje Retangular. De acordo com os diagramas (2) e (4) e utilizando relação de semelhança de triângulos na referida figura, chega-se:

$$m_x = \frac{pl^2}{24(\psi_2 + 1)} \left[3 - \frac{2}{\lambda l} (y_1 + y_2) \right]; \quad m'_x = m_x \cdot \psi_2; \quad m_y = \frac{py_1^2}{6}; \quad m'_y = m_y \cdot (\psi_1^2 - 1) \quad (31 a - d)$$

O coeficiente ψ_1 será a razão das dimensões x_2 por x_1 e ψ_2 é igual a φ_1 e φ_2 e vale 2,0520. Adotando-se a razão de comprimentos ($\lambda = 1,5$), o mesmo da Tabela 1, tem-se:

$$y_1 = 0,2842.l ; \quad y_2 = 0,5539.l ; \quad x = 0,5.l ; \quad \psi_1 = 1,9490$$

$$m_x = 2,5701 \frac{pl^2}{100}; \quad m'_x = 5,2738 \frac{pl^2}{100}; \quad m_y = 1,3462 \frac{pl^2}{100}; \quad m'_y = 3,7675 \frac{pl^2}{100} \quad (32 a - h)$$

LAJE DO TIPO 6

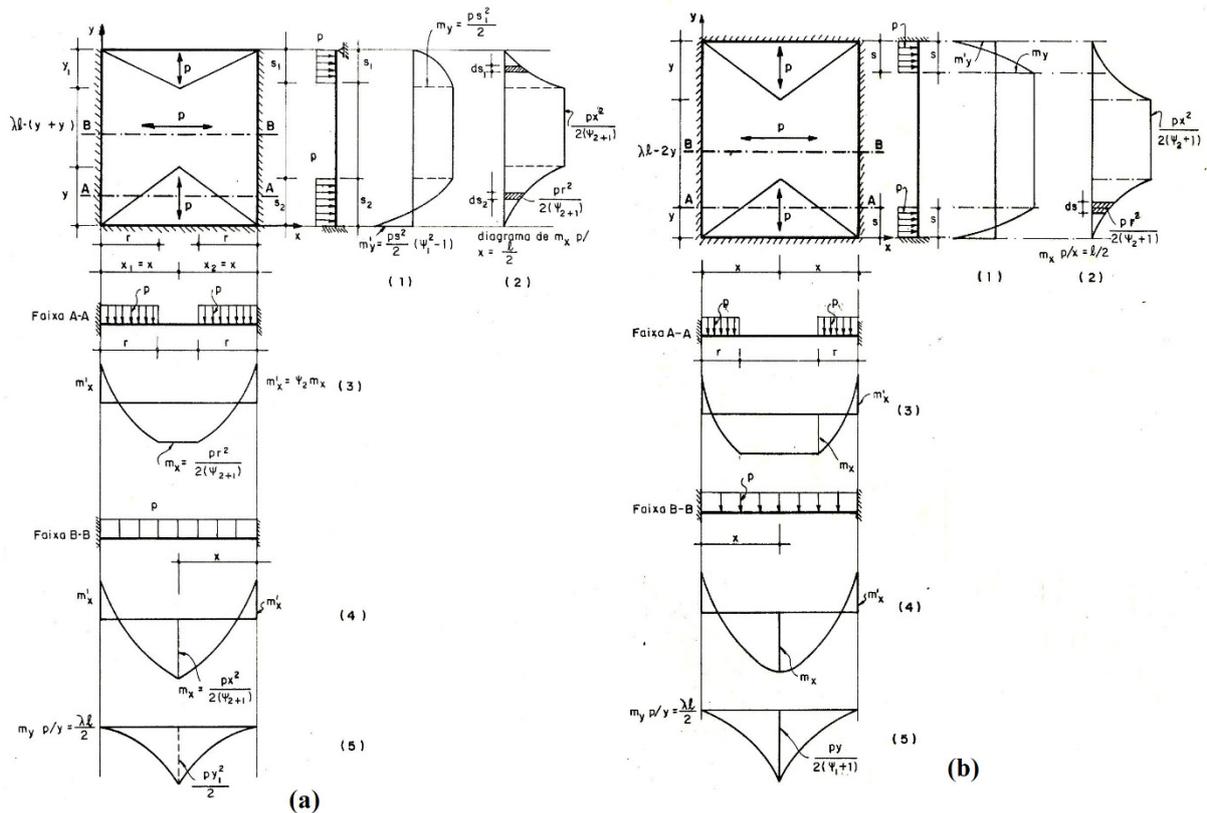
Conforme é apresentado na Figura 13 (b) a repartição de carga para o Tipo 6 da Laje Retangular; E de acordo com os diagramas (1), (2), (3) e (5) apresentando na referida figura e relação de semelhança de triângulos, chega-se:

$$m_x = \frac{px^2}{6(\psi_2 + 1)} \left[3 - \frac{4y}{\lambda l} \right]; \quad m'_x = m_x \cdot \psi_2; \quad m_y = \frac{py^2}{6(\psi_1 + 1)}; \quad m'_y = m_y \cdot \psi_1 \quad (33 a - d)$$

O coeficiente ψ_1 é igual a φ_3 e φ_4 , vale 3,2693; φ_2 e φ_1 é igual a e vale 2,1108. Adotando-se a razão de comprimentos ($\lambda = 1,5$), o mesmo da Tabela 1, $y = 0,5227.l$ e $x = 0,5.l$, chega-se:

$$m_x = 2,1512 \frac{pl^2}{100}; \quad m'_x = 4,5408 \frac{pl^2}{100}; \quad m_y = 1,0666 \frac{pl^2}{100}; \quad m'_y = 3,4871 \frac{pl^2}{100} \quad (34 a - f)$$

Figura 13: Laje sob Configuração de Ruína Comum: (a) Tipo 5B e (b) Tipo 6



METODOLOGIA

O artigo foi desenvolvido baseado em revisão bibliográfica sobre a Teoria das Charneiras Plásticas e o Método de Hillerborg e em seguida calculados os esforços solicitantes para lajes retangulares dos diversos tipos clássicos de vinculação. Sendo analisado as Configurações de Ruína Comum e Eventual. Conduzindo posterior confrontação dos resultados obtidos por laje e vinculação para a Teoria e o Método e compará-los.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O propósito deste artigo foi estabelecer uma comparação entre o Método de Hillerborg e a Teoria das Charneiras Plásticas, utilizando-se exemplos mais usuais de Lajes Retangulares com carga distribuída.

Conforme pode-se observar nos itens 3.5 e 3.6 deste, considerando-se para o Método de Hillerborg uma repartição de cargas equivalentes à configuração de ruína das lajes, os resultados obtidos pelos dois métodos foram idênticos. Isto significa dizer que, além da Teoria das Charneiras Plásticas se constituir num método prático de cálculo, de acordo com a Teoria da Plasticidade os resultados obtidos são corretos.

REFERÊNCIAS

HILLERBORG, A. **Strip Method of Design**. A view Point Publicaton: London, 1975.

JOHANSEN, K.W. **Linhas de Ruptura: Teoria e Prática**. Tradução de Jayme Mason. Ao Livro Técnico: Rio de Janeiro, 1962.

NAKAO, R.C.S.; PINHEIRO, L.M.; PAIVA, J.B. **Determinação de funções aproximadas para cálculo de lajes retangulares com carga uniforme**. CICTE, 1987.

PINHEIRO, L.M. **Análise Elástica e Plástica de Lajes Retangulares de Edifícios**. Tese de Doutorado. Escola de Engenharia de São Carlos: USP, 1988.

Enviado em: 07/08/2016.

Aceito em: 15/10/2016.